JFiZO 2020

Wojciech Pawlik

5 kwietnia 2020

Zadanie 39. Niech $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ będzie PDFA.

1. Załóżmy, że dla pewnego trzyelementowego $S \subseteq Q$ zbiór $csync(S)$ jest niepusty. Pokaż, że w takim razie istnieje $w \in csync(S)$ o długości nie większej niż $2|Q|^3$.
2. Udowodnij, że jeśli zbiór $csync(Q)$ jest niepusty, to zawiera on jakieś słowo o długości nie większej niż $2^{|Q|}$.

Dowód części 1.: Niech $S \subseteq Q$, $|S| = 3$ oraz $csync(S) \neq \emptyset$. Załóżmy nie wprost, że $\forall_{w \in csync(S)} |w| > 2|Q|$. Weźmy najkrótsze słowo w należące do $csync(S)$. Niech $w = a_1a_2\ldots a_n$ oraz $w_i = a_1a_2\ldots a_i$. Rozważmy ciągi $t^{(i)}$ dla $i \in \{1, 2, 3\}$ zdefiniowane następująca:

- $t_0^{(i)} = S_i$ gdzie $S_1, S_2, S_3 \in S$ i są różnymi stanami.
- $t_j^{(i)} = \hat{\delta}(S_i, w_j)$ Oczywiście z definicji zbioru $csync$ funkcja $\hat{\delta}$ jest dobrze zdefiniowana dla każdego w_i.

Oczywiście zachodzi równość $t_n^{(1)} = t_n^{(2)} = t_n^{(3)}$. Wybierając elementy ze zbioru mocy $|Q|$ możemy stworzyć $|Q|^3$ unikalnych trójek. Zatem skoro $n > 2|Q|^3$ to z zasady szufladkowej istnieją takie i, j, że $i < j$ oraz $t_i^{(1)} = t_i^{(2)} = t_i^{(3)} = t_j^{(1)} = t_j^{(2)} = t_j^{(3)}$. W takim razie niech $v = a_1a_2\ldots a_ia_{j+1}\ldots a_m$. Wtedy $|v| < w$ oraz $v \in csync(S)$ co prowadzi do sprzeczności.

Dowód części 2.: Załóżmy nie wprost, że zbiór $csync(Q)$ jest niepusty oraz $\forall_{w \in csync(Q)} |w| > 2^{|Q|}$. Weźmy najkrótsze słowo $w \in csync(Q)$. Niech $w = a_1a_2\ldots a_n$ oraz $w_i = a_1a_2\ldots a_i$. Rozważmy następujące podzbiory $X_i \subseteq Q$:

$$X_i = \{\hat{\delta}(q, w_i) : q \in Q\} \text{ dla } i \in \{1, 2, \ldots n\}$$

X_i jest podzbiorem stanów, do których możemy dojść z jakiegoś stanu wczytując i liter słowa w. Skoro $\{X_i\}$ są podzbiorami Q to może istnieć co najwyżej $2^{|Q|}$ różnych takich podzbiorów. Zdefiniowaliśmy ich $n > 2^{|Q|}$ zatem z zasady szufladkowej muszą istnieć i, j takie, że $i < j$ oraz $X_i = X_j$. W takim razie niech $v = a_1 a_2 \dots a_i a_{j+1} \dots a_m$. Wtedy $|v| < w$ oraz $v \in csync(S)$ co prowadzi do sprzeczności.