Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa
Lista zadań nr 2

Kwiatek

20 marca 2020

Zadanie 22. Wiadomo, że $\mathbb{L}'$ jest językiem regularnym. Pokaż, że w takim razie język $\{w : \exists n \in \mathbb{N}\ w^n \in \mathbb{L}\}$ jest też językiem regularnym. Przez w^n rozumiemy tu słowo w skonkatenowane ze sobą n razy.

Skonstruujmy DFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle, n = |Q|$ rozpoznający język $\mathbb{L}$. Stwórzmy DFA A' który będzie rozpoznawał język $\mathbb{L}'$ podany w zadaniu w następujący sposób:
$A' = \langle \Sigma, Q', \langle q_0, q_1, ...q_n \rangle, F', \delta' \rangle$

Niech stanem w automacie A' będzie krotka n stanów z automatu A. $Q' = \{\langle q_{i_0}, q_{i_1}, ...q_{i_{n-1}} \rangle : i_j \in \{0...n-1\}\}$

Niech δ' będzie taka, że z krotki q istnieje produkcja do krotki p po literze a z alfabetu Σ wtedy, gdy dla każdego stanu w krotce q istnieje produkcja po literze a do stanu w krotce p na odpowiadającym miejscu. $\delta'(\langle q_{i_0}, q_{i_1}, ...q_{i_{n-1}} \rangle, a) = \langle \delta(q_{i_0}, a), \delta(q_{i_1}, a), ...\delta(q_{i_{n-1}}, a) \rangle$

Niech stany akceptujące będą tymi stanami, które zawierają ciąg stanów z Q taki, że każdy kolejny element krotki, zaczynając od stanu na miejscu 0, ma wartość stanu oznaczonego indeksem kolejnego elementu w ciągu oraz ciąg kończy się stanem akceptującym z automatu A. $F' = \{\langle q_{i_0}, q_{i_1}, ...q_{i_{n-1}} \rangle : \exists m_0...m_n\ m_0 = 0 \land q_{i_{m_j}} = q_{m_{j+1}} \land q_{i_{m_n}} \in F\}$

Załóżmy, że po wczytaniu słowa w znajdujemy się w stanie akceptującym ($w \in \mathbb{L}'$). Oznacza to, że istnieje ciąg stanów jak w definicji wyżej. Zatem po wczytaniu słowa w (do automatu A) wychodząc ze stanu początkowego znaleźliśmy się w jakimś stanie q_{j_1}. Ale wczytując to samo słowo i startując ze stanu q_{j_1} znaleźliśmy się w stanie q_{j_2}. Ostatecznie przygodę kończymy w stanie q_{j_m}, który jest akceptujący. Oznacza to, że po wczytaniu słowa w^m w automacie A znaleźlibyśmy się w stanie akceptującym - czyli $w^m \in \mathbb{L}$.

W drugą stronę, weźmy w^m akceptowany przez język $\mathbb{L}$. Wtedy po kolejnych wczytaniach słowa w znajdziemy się w kolejnych stanach q_{j_i}, oraz $q_{j_m} \in F$. Zatem po wczytaniu słowa w do automatu A' znajdziemy się w krotce w której będzie istnieć ciąg stanów q_{j_i} (załóżmy, że pomijamy powtórzenia się stanów - w szczególności m może być znacznie większe od n) kończący się w stanie akceptującym. Zatem w będzie rozpoznane przez DFA A'.

Wydaje mi się, że tu należałoby trochę dokładniej opisać ten moment. To jest dla mnie niejasne.

Ostatni akapit trzeba poprawić.

Rozwiązanie jest poprawne i na właściwym poziomie abstrakcji, z wyjątkiem ostatniego akapitu, który moim zdaniem powinien być staranniej napisany.