Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa
Rozwiązanie zadania 77

Aleksander Czeszejko-Sochacki

4 kwietnia 2020

Zadanie 77. Niech $L \subseteq \Sigma^*$ będzie CFL. Czy wynika z tego, że $L_{3/4}$ jest CFL?

1 Definicje

Przyjmiemy że $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Niech $P \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ będzie określona jako najmniejsza symetryczna relacja taka, że:

- dla każdego $w \in \Sigma^*$ *zachodzi* $P(w, \epsilon)$
- dla każdego $a \in \Sigma$ i każdych $w, v \in \Sigma^*$ jeśli $P(w, v)$, to $P(aw, av)$;

Przez $L_{p/q}$ gdzie $L \subseteq \Sigma^*$ oznaczać będziemy język:

$$\{w \in \Sigma^* : \exists v \; v \in L \land P(w, v) \land |w|/|v| = p/q\}$$

2 Kontrprzykład

Odpowiedź na pytanie postawione w treści zadania brzmi: nie. Kontrprzykładem jest następujący język L:

$$L = \{a^n b^m c^m a^n \ dla \ n \in \mathbb{N}\}$$

3 Uzasadnienie

Udowodnimy, że L jest CFL oraz że $L_{3/4}$ nie jest CFL.

Twierdzenie 1 (L jest CFL)**.** *Pokażemy, że istnieje CFG, która generuje L.*

Dowód. Rozważmy następującą gramatykę:

$$\begin{array}{rcl} \langle \mathrm{S} \rangle & \models & aSa \mid M \\ \langle \mathrm{M} \rangle & \models & bMc \mid \varepsilon \end{array}$$

Krótkie uzasadnienie: weźmy symbol S. Produkuje on ciągi $a^n M a^n$. Z kolei produkcje z M generują ciągi $b^m c^m$. Stąd $L_{\{S,M\}} = L$. □

Twierdzenie 2 ($L_{3/4}$ zawiera wyrazy postaci $a^n b^m c^{(m+n)/2}$)**.**

Dowód. Weźmy dowolne $v = a^n b^m c^m a^n$. Oczywiście $v \in L$. Wtedy $w = a^n b^m c^{(n+m)/2} \in L_{3/4}$, ponieważ:

1. $P(w, v)$

   Dowód. Z definicji relacji P mamy $P(c^{(m-n)/2} a^n, \epsilon)$, stąd z przemienności P mamy $P(\epsilon, c^{(m-n)/2} a^n)$, stąd - na mocy reguły postawania nowych elementów relacji P:

   $$P(a^n b^m c^{(m+n)/2}, a^n b^m c^{(m+n)/2} c^{(m-n)/2} a^n)$$

   czyli $P(w, v)$. □

2. $|w|/|v| = 3/4$

□

Twierdzenie 3 (Jeśli $w \in L_{3/4}$ i $w = a^n b^m c^l$, to $l = (n + m)/2$)**.**

Dowód. Wynika to z faktu, że P jest najmniejszą relacją spełniającą warunki definicji, a to znaczy, że jeśli $P(w, v)$, to w jest prefiksem v bądź odwrotnie. □

Twierdzenie 4 ($L_{3/4}$ nie jest CFL)**.**

Dowód. Niech $L_{3/4}$ będzie CFL, N - stała z lematu o pompowaniu dla CFL, dla języka $L_{3/4}$. Weźmy $z = a^N b^N c^N$. Na mocy twierdzenia 2 $z \in L_{3/4}$. Niech

1. $z = uvwxy$
2. $|vwx| < N$
3. Dla jasności: pompujemy v oraz x. Wykładnikiem jest k.
4. A - wykładnik przy a, B - wykładnik przy b, C - wykładnik przy c; przyjęliśmy $A = B = C = N$.

Rozpatrzmy przypadki:

- vwx całkowicie w $a^N b^N$. Wtedy (dla $k = 0$):

  $$C > (A - |v| + B - |x|)/2$$

  Czyli nie zachodzi twierdzenie 3.

- niepuste v w b^N i x niepuste w c^N Musi być (dla $k = 2$):

  $$C + |x| = (A + B + |v|)/2$$

  Czyli $|x| = |v|/2$. Jednak wtedy (dla $k = 3$):

  $$C + 2|x| < (A + B + 2|v|)/2$$

  Nie zachodzi zatem twierdzenie 3.

- vwx całkowicie w c^N. Wtedy (dla $k = 0$):

  $$C - |v| - |x| < (A + B)/2$$

  I znów nie zachodzi twierdzenie 3.

Powyższe przypadki wyczerpują możliwości dobrania wyrazów spełniających lemat o pompowaniu dla CFL. Sprzeczność. □