Zadanie 1

Trudność: średnie Punktów: 4

Wręczono nam obwód kwantowy $Q_F^{\pm}$ o n wejściach i wyjściach (oraz osobno oznaczonych ancilla, żeby nie było wątpliwości, które wejścia są właściwymi argumentami funkcji F). Obiecano nam, że funkcja $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gdy dostanie wektor x, patrzy tylko na współrzędne ze zbioru $S \subseteq [n]$ i zwraca XOR-a wartości x na tych współrzędnych. Nie znamy tylko zbioru S. Jak odkryć go używając obwodu $Q_F^{\pm}$ tylko raz?

Zadanie 2

Trudność: średnie Punktów: 3

Ile razy trzeba odpytać obwód Q_F, dla F jak z poprzedniego zadania, w klasycznym modelu obliczeń?

Zadanie 3 [Deutsch-Jozsa]

Trudność: łatwe Punktów: 4

Dostajemy obwód realizujący funkcję $f : [N] \to \{0,1\}$, o której wiemy, że

1. Albo zwraca zero na każdym wejściu,
2. Albo jest zbalansowana, czyli zwraca zero na $N/2$ wejść i jeden na $N/2$ wejść.

Zbuduj obwód kwantowy, który pozwoli odróżnić te przypadki (z prawdopodobieństwem równym 1). Na ilu wejściach trzeba by odpytać funkcję f w modelu klasycznym?

Zadanie 4

Trudność: średnie Punktów: 2

Zaproponuj klasyczny algorytm zrandomizowany, który odpyta funkcję f na dwóch wejściach i odpowie poprawnie z prawdopodobieństwem przynajmniej $\frac{2}{3}$.

Zadanie 5

Trudność: średnie Punktów: 2

Funkcja $f : [N] \to \{0,1\}$ spełnia następującą obietnicę:

(1) Na pierwszej $N/2$ wejść zwraca 0, a na drugiej $N/2$ wejść 1, albo

(2) Na pierwszej $N/2$ wejść zwraca tyle samo zer co jedynek, podobnie na drugiej.

Jak zmodyfikować algorytm z Deutscha-Jozsy (z poprzedniego zadania), by odróżnić te przypadki?

Zadanie 6 [Problem Simona]

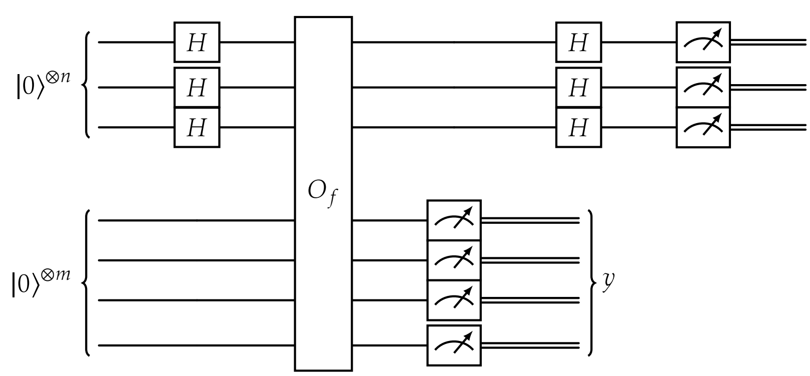
Trudność: trudne Punktów: 5

Dostajemy wyrocznię $O_f^{\pm}$ dla funkcji $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$, o której obiecano nam:

(i) f jest 2-do-1, czyli na każdy element z obrazu f wskazują dokładnie dwa argumenty.

(ii) $\exists_{s \in [N] \setminus \{\mathbf{0}\}} \forall_{x \in [N]}\ f(x) = f(x \oplus s)$.

Naszym celem jest znalezienie wektora s. W obwodzie na rysunku użyto wyroczni O_f, którą skonstruowaliśmy w zadaniu 9 z listy pierwszej. Jaką informację daje on nam na temat s-a? Ile razy musimy go odpalić, żeby wydedukować s?



Zadanie 7 [Forrelation]
Trudność: łatwe Punktów: 3

Dla funkcji $f, g : \{0,1\}^n \to \{-1,1\}$ zdefiniujemy miarę *forrelacji* (korelacji z Fourierem) jako

$$\Psi_{f,g} = \frac{1}{\sqrt{2^n}^3} \sum_{x,y \in [2^n]} f(x)(-1)^{x \cdot y} g(y),$$

gdzie $x \cdot y$ to normalny iloczyn skalarny.

Dostajemy funkcje f i g, o których obiecano nam, że wpadają w jeden z przypadków:

(1) $\Psi_{f,g} \geqslant \frac{3}{5}$, albo

(2) $|\Psi_{f,g}| \leqslant \frac{1}{15}$.

Zaprojektuj obwód kwantowy, który korzysta z $O_f^{\pm}$ oraz $O_g^{\pm}$ po $\mathcal{O}(1)$ razy i pozwala odróżnić te przypadki ze stałym[1] prawdopodobieństwem błędu.

Zadanie 8
Trudność: trudne Punktów: 4

Rozwiązujemy to samo zadanie, co przed chwilą, ale tym razem dysponujemy obwodem $\mathsf{CONTROLLED}{-}O_{f,g}^{\pm}$, który przyjmuje $n+1$ bitów i aplikuje na n bitach funkcję f lub g w zależności od wartości bitu kontrolnego. Obwód ten możemy wykorzystać tylko jednokrotnie.

Skonstruuj algorytm, który odpowie TAK z prawdopodobieństwem $\frac{1+\Psi_{f,g}}{2}$, a NIE z pozostałym.

Zadanie 9
Trudność: łatwe Punktów: 1

Zmodyfikuj powyższy algorytm tak, by zarówno w przypadku (1) jak i (2) zwracał poprawną odpowiedź z prawdopodobieństwem 60% (nie zwiększając liczby odpytań obwodu $\mathsf{CONTROLLED}{-}O_{f,g}^{\pm}$).

[1] Tzn. o stałą lepszym od $\frac{1}{2}$.