Katarzyna Miernikiewicz, 299577

Zadanie 23.

Treść:

Załóżmy, że L jest pewnym językiem regularnym. Czy język $L/2 = \{w : \exists v \; vw \in L \wedge |v| = |w|\}$ jest regularny?

Rozwiązanie:

Język $L/2$ jest regularny. Żeby to pokazać, skonstruujemy automat $\mathcal{B}$ niedeterministyczny, który będzie go rozpoznawał. Skorzystamy z tego, że język L jest regularny, więc istnieje automat $\mathcal{A}$ deterministyczny, który go rozpoznaje.

Stany automatu $\mathcal{B}$ to wszystkie pary uporządkowane (q_i, q_j), takie że q_i, q_j to (niekoniecznie różne) stany automatu $\mathcal{A}$. Dodatkowo mamy jeden stan początkowy $q_0^{\mathcal{B}}$.
Stan początkowy $q_0^{\mathcal{B}}$ jest połączony (skierowanymi) ε-krawędziami ze stanami (q_i, q_i) dla wszystkich i.

Będziemy chcieli na pierwszej współrzędnej stanu symulować zwyczajne zachowanie automatu $\mathcal{A}$, natomiast na drugiej będziemy przesuwać się jak automat $\mathcal{A}$, ale "do tyłu", "zgadując" słowo v z definicji języka $L/2$. Przejścia pomiędzy stanami będą więc zdefiniowane jak niżej (dla wygody korzystamy z relacyjnego zapisu przejść również dla automatu $\mathcal{A}$):

$$\delta^{\mathcal{B}}((q_i, q_j), a, (q_k, q_l)) \iff \delta^{\mathcal{A}}(q_i, a, q_k) \wedge \exists a' \in \Sigma \; \delta^{\mathcal{A}}(q_l, a', q_j)$$

Stanami akceptującymi automatu $\mathcal{B}$ będą $(q_k, q_0^{\mathcal{A}})$ takie, że q_k jest stanem akceptującym $\mathcal{A}$, a $q_0^{\mathcal{A}}$ jego stanem początkowym.

Możemy zauważyć, że przejście od stanu (q_i, q_i) do $(q_k, q_0^{\mathcal{A}})$ w automacie $\mathcal{B}$ możemy interpretować jako przejście od stanu $q_0^{\mathcal{A}}$ do q_k, takie że w połowie ścieżki miniemy stan q_i, w automacie $\mathcal{A}$. Ta intuicja pomoże nam pokazać, że automat $\mathcal{B}$ naprawdę rozpoznaje język $L/2$.

Pokażemy, że automat $\mathcal{B}$ akceptuje słowo w wtedy i tylko wtedy, gdy w należy do $L/2$. W tym celu pokażemy dwie implikacje.

1. $w \in L/2 \Rightarrow$ automat $\mathcal{B}$ akceptuje w

Weźmy słowo w należące do języka $L/2$. Skoro to słowo jest w języku, to istnieje przynajmniej jedno takie v, że $vw \in L$ i $|v| = |w|$; weźmy je. Będziemy patrzeć na kolejne stany automatu $\mathcal{A}$ w czasie czytania słowa vw. Automat $\mathcal{A}$ po przeczytaniu słowa v znalazłby się w pewnym stanie q_{i_m}, przechodząc ścieżką $q_0^{\mathcal{A}}, q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_{m-1}}, q_{i_m}$. Czytając w jako część vw, przechodziłby ścieżką $q_{i_m}, q_{i_{m+1}}, q_{i_{m+2}}, ..., q_{i_{k-1}}, q_{i_k}$.
W takim razie w automacie $\mathcal{B}$ będziemy patrzeć na ścieżkę zaczynającą się od przejścia ε-krawędzią od $q_0^{\mathcal{B}}$ do (q_{i_m}, q_{i_m}). $\mathcal{A}$ czytając ostatnią literę v przeszedł z $q_{i_{m-1}}$ do q_{i_m}; czytając pierwszą literę w z q_{i_m} do $q_{i_{m+1}}$. W takim razie w automacie $\mathcal{B}$ istnieje przejście od (q_{i_m}, q_{i_m}) do $(q_{i_{m+1}}, q_{i_{m-1}})$ i to ono będzie nas interesować, jako następne przejście na ścieżce potwierdzającej

należenie w do języka $L/2$. Następne przejście możemy wykonać do stanu $(q_{i_{m+2}}, q_{i_{m-2}})$, podobnie jak przed chwilą. Ostatecznie wczytując automatem $\mathcal{B}$ słowo w – ponieważ $|v| = |w|$, więc ścieżki od $q_0^{\mathcal{A}}$ do q_{i_m} i od q_{i_m} do q_{i_k} były tej samej długości – możemy znaleźć się w stanie $(q_{i_k}, q_0^{\mathcal{A}})$.

Ponieważ słowo vw należy do L, stan q_{i_k} jest akceptujący w automacie $\mathcal{A}$, więc stan $(q_{i_k}, q_0^{\mathcal{A}})$ jest akceptujący w $\mathcal{B}$. Automat $\mathcal{B}$ poprawnie uznaje słowo w za należące do $L/2$.

2. automat $\mathcal{B}$ akceptuje $w \Rightarrow w \in L/2$

Automat $\mathcal{B}$ zaakceptował w, co oznacza, że istnieje ścieżka zaczynająca się od przejścia od $q_0^{\mathcal{B}}$ do pewnego (q_{i_m}, q_{i_m}) i kończąca się w $(q_{i_k}, q_0^{\mathcal{A}})$ takim, że q_{i_k} jest stanem akceptującym $\mathcal{A}$.

W takim razie w automacie $\mathcal{A}$ słowo w pozwala przejść od stanu q_{i_m} do q_{i_k}, oraz istnieje słowo v, które pozwala przejść w $\mathcal{A}$ od stanu $q_0^{\mathcal{A}}$ do q_{i_m}. Żeby je odczytać, możemy popatrzeć na litery a' z definicji przejścia w automacie $\mathcal{B}$ – czytane kolejno, tzn. zgodnie z kierunkiem ścieżki, którą przeszliśmy w $\mathcal{B}$, utworzą słowo v^R. Ponadto słowa w i v mają tę samą długość, bo przecież wykonaliśmy tyle samo przejść na pierwszej, jak i na drugiej współrzędnej stanu.

Oznacza to, że słowo vw jest akceptowane przez $\mathcal{A}$, a więc należy do L; i skoro $|w| = |v|$, to $w \in L/2$, co kończy dowód.

Skonstruowaliśmy zatem niedeterministyczny automat skończony $\mathcal{B}$, który rozpoznaje język $L/2$, zatem $L/2$ jest językiem regularnym.

$\square$

Bardzo dobrze! Podoba mi się to rozwiązanie. Nie mam uwag.