Oskar Wieczorek, i263984

Zadanie 55

Czy język takich słów nad alfabetem $\{0,1\}$, które mają parzystą długość i w których pierwszej połowie jest przynajmniej tyle samo jedynek, co w drugiej połowie jest bezkontekstowy?

Rozwiązanie

Niech L będzie językiem z treści zadania.

Twierdzenie. *L nie jest bezkontekstowy.*

Dowód. Załóżmy, że L jest bezkontekstowy. Z *Lematu o Pompowaniu* wiemy, że istnieje taka stała n, że dla każdego słowa $w \in L$, takiego że $|w| > n$ istnieje podział $sztyx = w$, taki, że $zy \neq \epsilon$ oraz $|zty| < n$ i dla każdej liczby naturalnej k zachodzi $sz^k ty^k x \in L$.

Niech n będzie stałą z *Lematu o Pompowaniu*. Rozpatrzmy słowo:

$$w = 1^n 0^n 1^n 0^n 1^{2n}.$$

Przez L będziemy oznaczać liczbę jedynek w pierwszej połowie słowa w, a przez P liczbę jedynek w drugiej połowie słowa w. Analogicznie przez L' będziemy oznaczać liczbę jedynek w pierwszej połowie słowa $sz^k ty^k x$, a przez P' liczbę jedynek w drugiej połowie słowa $sz^k ty^k x$. Zauważmy, że $w \in L$, bo $|w| = 6n$ oraz $L = P$.

Rozważmy podział $sztyx = w$. Zauważmy, że $|zy| = 2m$, dla jakiegoś $m \in \mathbb{N}$, ponieważ gdyby $|zy|$ było nieparzyste, wtedy $|sz^0 ty^0 x|$ również, więc $sz^0 ty^0 x$ nie należałoby do L. Rozważmy następujące przypadki:

1. Słowo zy zawiera jakieś jedynki z pierwszej połowy słowa w.
   bo |zty| <n
   Ponieważ $|zy| < n$, więc wiemy, że zy na pewno nie zawiera żadnych jedynek z drugiej połowy słowa w. Rozpatrzmy słowo $sz^0 ty^0 x$. Jest ono postaci $(0+1)^{3n-m}(0+1)^{n-m}1^{2n}$, ponieważ operacja potęgowania nie usunęła żadnych jedynek z drugiej połowy słowa w i wszystkie te jedynki znajdują się na pewno w drugiej połowie słowa $sz^0 ty^0 x$, gdyż $2n < 3n - m$. Ponieważ operacja potęgowania usunęła jakieś jedynki z pierwszej połowy słowa w, a wszystkie jedynki z drugiej połowy słowa w są w drugiej połowie słowa $sz^0 ty^0 x$, zatem $L' < L = P \leqslant P'$. Czyli $sz^0 ty^0 x \notin L$.

2. Słowo zy zawiera jakieś jedynki z drugiej połowy słowa w.
   bo |zty|<n
   Ponieważ $|zy| < n$, więc wiemy, że zy na pewno nie zawiera żadnych jedynek z pierwszej połowy słowa w. Rozpatrzmy słowo $sz^2 ty^2 x$. Jest ono postaci $1^n 0^n 1^n 0^m (0+1)^{3n+m}$, ponieważ $m < n$. Zatem $L' = L = P < P'$, ponieważ liczba jedynek w pierwszej połowie nie uległa zmianie, a liczba jedynek w drugiej połowie zwiększyła się. Czyli $sz^2 ty^2 x \notin L$.

3. Słowo zy jest postaci 0^* i zawiera zera tylko z pierwszej połowy słowa w.
   Rozpatrzmy słowo $sz^2 ty^2 x$. Jest ono postaci $1^n 0^{n+2m} 1^{n-m} 1^m 0^n 1^{2n}$, bo $m < n$. Zatem $L' = 2n - m$, a $P' = 2n + m$, a więc $L' < P'$. Czyli $sz^2 ty^2 x \notin L$.

4. Słowo zy jest postaci 0^* i zawiera tylko zera z drugiej połowy słowa w.
   Rozpatrzmy słowo $sz^0 ty^0 x$. Jest ono postaci $1^n 0^n 1^{n-m} 1^m 0^{n-2m} 1^{2n}$. Zatem $L' = 2n - m$, a $P' = 2n + m$, a więc $L' < P'$. Czyli $sz^0 ty^0 x \notin L$.

5. Inne przypadki są niemożliwe.

Zatem dla każdego podziału $sztyx = w$, który spełnia warunki z *Lematu o Pompowaniu* istnieje takie k, że $sz^k ty^k x \notin L$. ↯

□