

Zadanie 23

Założmy, że L jest pewnym językiem regularnym. Czy język $L/2 = \{w : \exists v \, vw \in L \wedge |v| = |w|\}$ jest regularny?

Rozwiązanie

Tak! Skonstruujemy automat, który go rozstrzyga.

Ponieważ L jest regularny, to istnieje DFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$, rozstrzygający L . Niech $n = |Q|$.

Idea

Chcemy skonstruować automat $A_{1/2}$, który dla wczytanego dotychczas słowa w będzie przechowywał w stanie następujące informacje:

1. Zbiór stanów z Q osiągalnych po $|w|$ krokach automatu A , startującego z q_0 .
2. W jakich stanach znajdzie się automat A po wczytaniu w , przy starcie odpowiednio z $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$.

Stanami akceptującymi $A_{1/2}$, będą takie stany, w których zbiorze 1 będzie istniał taki stan q , że startując automat A z tego stanu i wczytując słowo w , automat A zaakceptuje (ta informacja zawiera się w 2).

Formalnie

$$A_{1/2} = \langle \Sigma, Q', q'_0, F', \delta' \rangle \quad (1)$$

$$Q' = 2^Q \times Q^n \quad (2)$$

Chcielibyśmy, aby automat $A_{1/2}$ miał następującą własność P : po wczytaniu słowa w , automat ma być w stanie $\langle R, D \rangle$, takim, że R zawiera dokładnie wszystkie stany z Q osiągalne po $|w|$ krokach automatu A , startującego z q_0 , natomiast $D = \langle \hat{\delta}(q_0, w), \dots, \hat{\delta}(q_{n-1}, w) \rangle$.

$$q'_0 = \langle \{q_0\}, \langle q_0, \dots, q_{n-1} \rangle \rangle \quad (3)$$

Dla słowa $w = \epsilon$ własność P jest zachowana, ponieważ stan q'_0 składa się z singletonu q_0 (a więc jedyne stanu osiągalnego po 0 krokach automatu A) oraz krotki $\langle q_0, \dots, q_{n-1} \rangle = \langle \hat{\delta}(q_0, \epsilon), \dots, \hat{\delta}(q_{n-1}, \epsilon) \rangle$.

$$\delta'(\langle R, \langle d_0, \dots, d_{n-1} \rangle \rangle, a) = \langle \{q \in Q : \exists q' \in R \exists b \in \Sigma \delta(q', b) = q\}, \langle \delta(d_0, a), \dots, \delta(d_{n-1}, a) \rangle \rangle \quad (4)$$

Gdy automat $A_{1/2}$ wczyta literę a , przechodzi do nowego stanu, który składa się ze zbioru wszystkich stanów z Q osiągalnych w jednym ruchu ze zbioru R oraz krotki uaktualnionej o wczytanie litery a . Funkcja δ' zachowuje więc własność P .

$$F' = \{ \langle R, \langle d_0, \dots, d_{n-1} \rangle \rangle \in Q' : \exists q_i \in R \, d_i \in F \} \quad (5)$$

Stanami akceptującymi w automacie $A_{1/2}$ są takie stany, w których zbiorze stanów R znajduje się chociaż jeden taki stan, z którego uruchomienie wczytywanego słowa skutkuje zaakceptowaniem przez automat A .

Lemat

$$\forall w \in \Sigma^* \quad w \in L/2 \iff \hat{\delta}'(q'_0, w) \in F'$$

Dowód

1. ($\implies$)

Założmy, że $w \in L/2$ i niech $\hat{\delta}'(q'_0, w) = \langle R, \langle d_0, \dots, d_{n-1} \rangle \rangle$. Z definicji $L/2$ wiemy, że istnieje takie słowo v długości $|w|$, że $vw \in L$. Niech $\hat{\delta}(q_0, v) = q_k$. Z własności P wiemy, że $q_k \in R$, ponieważ po $|w|$ krokach można osiągnąć q_k w automacie A , startując z q_0 . Wiemy również, że $d_k = \hat{\delta}(q_k, w)$ oraz, że $\hat{\delta}(q_k, w) \in F$. Zatem istnieje takie $q_i \in R$ (przy $i = k$), że $d_i \in F$. Czyli $\hat{\delta}'(q'_0, w) \in F'$.

2. ($\impliedby$)

Założmy, że $w \notin L/2$ i niech $\hat{\delta}'(q'_0, w) = \langle R, \langle d_0, \dots, d_{n-1} \rangle \rangle$. Weźmy dowolny stan $q_i \in R$. Z własności P wiemy, że istnieje takie słowo v długości $|w|$, że $\hat{\delta}(q_0, v) = q_i$. Ponieważ $\hat{\delta}(q_0, vw) \notin F$ oraz $\hat{\delta}(q_0, vw) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, v), w) = \hat{\delta}(q_i, w) = d_i$, to $d_i \notin F$. Czyli $\hat{\delta}'(q'_0, w) \notin F'$.

**Rozwiązanie jest poprawne i jasno napisane.
Można było konstruować NDFA zamiast DFA co by
ułatwiło rozwiązanie.**