JFiZO – rozwiązanie zadania nr 80

J-23

21 marca 2020

Zadanie 80.
Pokaż że dla każdego n istnieje transducer Mealy'ego $T = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma \rangle$ taki że $|Q| = |\Sigma| = n$ i że każdy transducer Moore'a równoważny T ma przynajmniej n^2 stanów.

Dowód. (nie wprost)
Ustalmy n. Skonstruujemy interesujący nas transducer Mealy'ego T w następujący sposób:

- $|\Sigma_1| = n^2$
- $Q = \Sigma$
- q_0 jest dowolne
- $\delta(a, \_) = a$, gdzie $\_$ to ignorowany argument
- $\sigma : \Sigma \times \Sigma \leftrightarrow \Sigma_1$ jest bijekcją[1]

Tak opisany transducer pamięta jedynie ostatni znak wejściowy. Każde kolejne dwa znaki są przez niego przetwarzane na unikatowy znak z Σ_1, przy czym pierwszy znak wejściowy tworzy dodatkową parę ze znakiem q_0, co powoduje że f_T zachowuje długość słowa.

Dowód. Indukcyjny względem długości słowa wejściowego.

- $n = 0$:
$$|f_T(\epsilon)| \overset{def}{=} |\epsilon| = 0$$
- $n = 1$:
$$|f_T(a)| = |f_T(\epsilon)\sigma(\hat{\delta}(\epsilon, q_0), a)| = 0 + |\sigma(q_0, a)| = 1$$
- $n > 1$: Niech $|wa| = n$.
$$|f_T(wa)| = |(f_T(w))\sigma(\hat{\delta}(w, q_0), a)| \overset{ZI}{=} n-1+|\sigma(\hat{\delta}(w, q_0), a)| = n-1+1 = n$$

$\square$

[1] Jej istnienie wynika z równoliczności dziedziny i przeciwdziedziny.

Mając właściwy transducer T **załóżmy nie wprost**, że istnieje równoważny mu transducer Moore'a T', którego zbiór stanów Q' ma mniej niż n^2 elementów. Bez utraty ogólności załóżmy osiągalność wszystkich stanów[2].

Weźmy jego funkcję $\sigma' : Q' \to \Sigma_1^*$. Ograniczymy jej typ do $Q' \to \Sigma_1$ korzystając z równoważności transducerów.

Dowód. [3] Załóżmy nie wprost że istnieje słowo $wa \in \Sigma^*$ takie że

$$\sigma'(\hat{\delta}'(wa, q_0')) \in (\Sigma_1^* \setminus \Sigma_1)$$

Korzystając z równoważności transducerów:

$$|f_T(wa)| - |f_T(w)| = |f_{T'}(wa)| - |f_{T'}(w)| = 1$$

Z definicji $f_{T'}(wa)$ wiadomo że $f_{T'}(w)$ jest jego prefiksem, zatem sufiks długości 1 jest równy $\sigma'(\hat{\delta}'(wa, q_0'))$, co jest sprzeczne z założeniem. □

Obserwacja:

$$|Q'| < n^2 = |\Sigma_1|$$

stąd istnieje $\beta \in \Sigma_1$:

$$\neg \exists q' \in Q' \ (\sigma'(q') = \beta)$$

Weźmy więc $a, b \in \Sigma$:

$$\sigma(a, b) = \beta$$

Słowo ab będzie naszym świadkiem sprzeczności. Niech $f_T(a) = \alpha$.

$$f_T(ab) = (f_T(a))\sigma(\hat{\delta}(a, q_0), b) = (\alpha)\sigma(a, b) = \alpha\beta$$

Rozważmy następnie wartość $f_{T'}(ab)$:

$$f_{T'}(ab) = (f_{T'}(a))\sigma'(\hat{\delta}'(ab, q_0')) = (f_T(a))\sigma'(q'_{ab}) = \alpha\gamma$$

Gdzie $\gamma \neq \beta$, ponieważ β nie należy do obrazu σ'. Ostatecznie otrzymujemy:

$$f_T(ab) = \alpha\beta \neq \alpha\gamma = f_{T'}(ab)$$

co stoi w sprzeczności z założeniem o równoważności transducerów T i T'. □

[2] Rozumianą jako istnienie niepustego słowa do niego prowadzącego lub bycie stanem początkowym.

[3] Dowód ten pomija patologiczny przypadek stanu początkowego do którego nie da się dojść niepustym słowem, a któremu σ' przypisuje jakąś nieprzyjemną wartość – w takim wypadku możemy bezpiecznie ją zamienić na element z Σ_1, nie zmieniając semantyki transducera.