# Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa: Zadanie 75

Marcin Witkowski

4 kwietnia 2020

## Treść

Niech $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ będzie regularny. Czy wynika z tego, że:

a) język $\mathcal{L}_{3/2}$ jest regularny?
b) język $\mathcal{L}_{1/\infty} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}_{1/i}$ jest regularny?

## Rozwiązanie

Przypomnijmy założenia zadania:

$$\Sigma = \{a, b, c, d\}$$

$$P \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$$

gdzie $P$ jest najmniejszą symetryczą relacją spełniającą:

$$\forall_{w \in \Sigma^*} \ P(w, \epsilon)$$

$$\forall_{a \in \Sigma} \forall_{w,v \in \Sigma^*} \ P(w, v) \Rightarrow P(aw, av)$$

*Intuicja.* Bez straty ogólności załóżmy, że $|w| \leq |v|$. Wtedy o relacji $P$ można myśleć tak, że $P(w, v)$ zachodzi gdy $w$ jest prefiksem $v$.

### Podpunkt $a$

$$\mathcal{L}_{3/2} = \{w \in \Sigma^* : \ \exists_v \ v \in \mathcal{L} \land P(w, v) \land 2|w| = 3|v|\}$$

Weźmy język $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\varphi$, gdzie $\varphi = (aa)^*$. Załóżmy nie wprost, że $\mathcal{L}_{3/2}$ jest regularny. Istnieje wtedy stała $n$ z lematu o pompowaniu dla języków regularnych. Weźmy wyraz $w = a^{2n}b^n \in \mathcal{L}_{3/2}$. W oczywisty sposób $v = a^{2n} \in \mathcal{L}$. Rozważmy podział $w = xyz$. Skoro $|xy| \leq n$ to znaczy, że $xy$ składa się z samych znaków $a$, $y = a^j$. Rozważmy $w' = xy^0z = a^{2n-j}b^n$. Żeby $w'$ należało do $\mathcal{L}_{3/2}$, musi istnieć podział $w' = sk$, taki że $|s| = \frac{2}{3}(3n - j)$ oraz $|\mathrm{k}| = \frac{1}{3}(3n - j)$, $s \in \mathcal{L}$. Skoro usunęliśmy $j$ znaków $a$, a $s$ musi być długości $2n - \frac{2}{3}j$, to oznacza, że $s$ zawiera znaki $b$, zatem nie należy do $\mathcal{L}$, czyli $w' \notin \mathcal{L}_{3/2}$. Z drugiej strony taki podział może też w ogóle nie istnieć, tj. oczekiwane długości wyrazów nie będą liczbami naturalnymi – wtedy $w'$ także nie należy do $\mathcal{L}_{3/2}$. Zatem $\mathcal{L}_{3/2}$ nie jest językiem regularnym.

## Podpunkt *b*

Na początku możemy trochę przekształcić język $\mathcal{L}_{1/\infty}$. Zauważmy, że język $\mathcal{L}_{1/i}$ zawiera wszystkie wyrazy $w$, które są prefiksem $v \in \mathcal{L}$, takie że $|v| = i|w|$. Skoro tak, to suma wszystkich takich języków będzie zawierać takie wyrazy $w$, będące prefiksem $v \in \mathcal{L}$, że $|w| \mid |v|$.

$$\mathcal{L}_{1/\infty} = \{w \in \Sigma^* : \ \exists_{v \in \Sigma^*} \exists_{k \in \mathbb{N}} \ wv \in \mathcal{L} \wedge |w| \mid |v|\}$$

Zbudujemy teraz automat rozpoznający $\mathcal{L}_{1/\infty}$. Skoro $\mathcal{L}$ jest regularny, to istnieje DFA $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ rozpoznający $\mathcal{L}$. Zdefiniujmy $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q', q_0', F', \delta')$

$$\begin{aligned}
Q' &= Q \times \mathcal{P}(Q)^{\mathcal{P}(Q)} \\
q_0' &= (q_0, \ \mathbf{P} \mapsto \mathbf{P}) \\
F' &= \{(q, \ m) : \ \exists_{k \in \mathbb{N}} \exists_{f \in F} \ f \in m^k(\{q\})\} \\
\delta'((q, m), \ a) &= (\delta(q, a), \mathbf{P} \mapsto \{\delta(p, l) : p \in m(\mathbf{P}) \wedge l \in \Sigma\})
\end{aligned}$$

*Intuicja.* Czytając słowo długości $k$ budujemy funkcję mapującą zbiór stanów z $\mathcal{A}$ na zbiór stanów do których można dotrzeć po wczytaniu jakiegokolwiek wyrazu długości $k$. Wtedy dany stan $(q, \ m) \in Q'$ jest stanem akceptującym, jeżeli możemy po nim wczytać słowo długości $k \cdot i$, $i \in \mathbb{N}$ startując z $q$ w oryginalnym automacie i kończąc w jakimś stanie należącym do $F$. Inaczej mówiąc, $m$ iterowane $i$ razy po zaaplikowaniu singletonu $\{q\}$ jako argument będzie zawierać stan należący do $F$.

Zawieranie $\mathcal{L}_{1/\infty} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}$ wynika z konstrukcji. Pokażemy, że $\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} \subseteq \mathcal{L}_{1/\infty}$. Weźmy dowolne słowo $w \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}$. Wiemy, że $w$ jest akceptowane przez $\mathcal{A}'$ wtw. $\exists_{v \in \Sigma^*} \exists_{k \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{A}$ akceptuje słowo $wv \wedge |v| = k|w|$. Ale takie słowa należą także z definicji do $\mathcal{L}_{1/\infty}$. Zatem $\mathcal{A}'$ rozpoznaje $\mathcal{L}_{1/\infty}$, czyli $\mathcal{L}_{1/\infty}$ jest regularny. $\square$