Zadanie 40M

Artur Błaszkiewicz

Wrocław, April 5, 2020

Treść zadania: Udowodnij, że dla każdego (dostatecznie dużego) n istnieje PDFA $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$, taki że $|Q| = n$ i że...

Wersja M. ...istnieje trzyelementowy $S \subseteq Q$ taki że zbiór $csync(S)$ jest niepusty ale nie zawiera słowa krótszego niż $n^3/10000$.

Konstrukcja $\mathcal{A}$: Skonstuujmy $\mathcal{A}$ w następujący sposób: Dzielimy stany Q na trzy rozłączne części Q_0, Q_1, Q_2. Niech

$$Q_0 = \{q_0, q_1, ..., q_{m-1}\}$$
$$Q_1 = \{q_m, q_{m+1}, ..., q_{2m-1}\}$$
$$Q_2 = \{q_{2m}, q_{2m+1}, ..., q_{n-1}\}$$

gdzie $m = \lfloor n/3 \rfloor$.

$$S = \{q_0, q_m, q_{2m}\}$$
$$\Sigma = \{a, b, c, d\}$$

Dla $i < m - 1 : \delta(q_i, a) = q_{i+1}$
Dla $i \geq m - 1 : \delta(q_i, a) = q_i$.

Dla $i < m - 1 : \delta(q_i, b)$ jest niezdefiniowana.
Dla $i = m - 1 : \delta(q_i, b) = q_0$
Dla $m - 1 < i < 2m - 1 : \delta(q_i, b) = q_{i+1}$
Dla $i \geq 2m - 1 : \delta(q_i, b) = q_i$

Dla $i = m - 1 \vee i = 2m - 1 : \delta(q_i, c) = q_{i-(m-1)}$
Dla $2m \leq i < q_{n-1} : \delta(q_i, c) = q_{i+1}$
W pozostałych stanach $\delta(\_, c)$ niezdefiniowane.

Dla $i = 0 \vee i = m \vee i = n - 1 : delta(q_i, d) = q_n$ W pozostałych stanach $\delta(\_, d)$ niezdefiniowane.

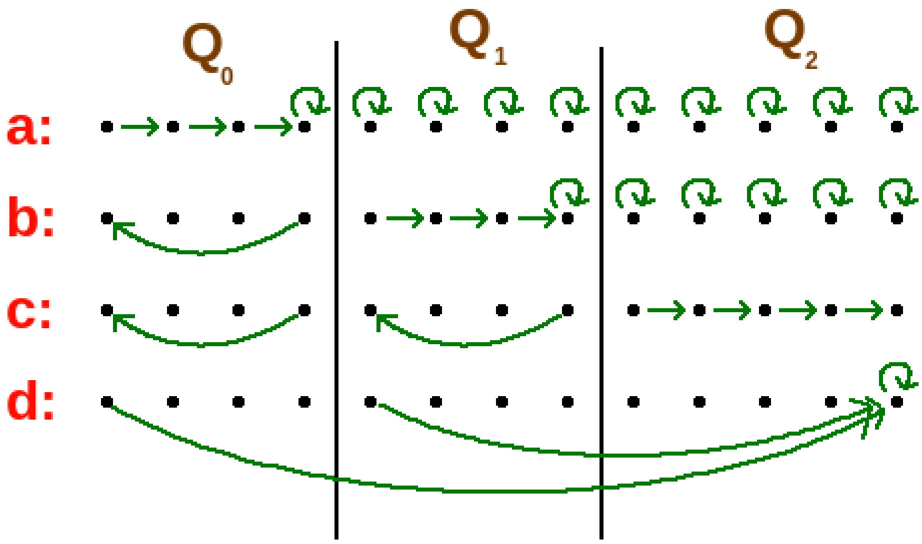

Figure 1: $\mathcal{A}$

Automat $\mathcal{A}$ spełnia warunki zadania: Dowód będzie miał następującą formę:
Słowa z $csync(S)$ zawierają literkę $'d'$.
Słowa z $csync(S)$ zawierające $'d'$ zawierają co najmniej $n-2m-1$ literek $'c'$.
W słowie z $csync(S)$ pomiędzy każdymi dwoma literkami $'c'$ jest co najmniej $m-1$ literek $'b'$.
W słowie z $csync(S)$ pomiędzy każdymi dwoma literkami $'b'$ jest co najmniej $m-1$ literek $'a'$.
Daje nam to minimalną ilość liter $'a'$ w słowie z $csync(S)$:

Zmnieć na listę.

Po każdym stwierdzeniu można dodać dowód.

$$(n-2m-2)(m-2)(m-1) \geq (m-2)(m-2)(m-2) = (\lfloor n/3 \rfloor - 2)^3 \geq$$
$$\geq (n/3-3)^3$$

Co dla dużych n jest większe niż $n^3/10000$.

Mówię, że literka $'x'$ jest przejściem ze stanu q_i do stanu q_j, gdy $\delta(q_i, x) = q_j$

Zbiór $csync(S)$ jest niepusty: Do $scync(S)$ należy słowo $((a^{m-1}b)^{m-1}(a)^{m-1}c)^{n-2m-1}d$, co można łatwo sprawdzić.

Lemat 1: Jeśli $q_i \in Q_j \wedge x \in \{a, b, c\}$ to $\delta(q_i, x) = Q_j$

Dowód: Przez przypadki.

Lemat, dowód i wniosek można skompresować w jedno zdanie.

Wniosek: Słowa z $csync(S)$ zawierają literkę $'d'$

Lemat 2: Słowa z $csync(S)$ zawierające $'d'$ zawierają co najmniej $n-2m-1$ literek $'c'$.

Dowód: Stan $q_2m \in S$ jest w Q_2, gdzie jedynym stanem ze zdefiniowanym przejściem $'d'$ jest stan q_{n-1}. Dojść do niego można tylko za pomocą przejść $'c'$, których musimy wykonać $(n-1)-2m$.

Zauważmy, że $n-2m-1$ literek $'c'$ musi wystąpić przed $'d'$, więc w dalszej części rozwiązania zakładam, że $'d'$ nie pojawiło się wcześniej w słowie.

Lemat 3: W słowie z $csync(S)$ pomiędzy każdymi dwoma literkami $'c'$ jest co najmniej $m-1$ literek $'b'$.

Dowód: Jeżeli $\mathcal{A}$ będąc w stanie $q_i \in Q_1$ przeczyta słowo $w \in \{a,b,c\}^*$ i ostatnią literką słowa w jest $'c'$ oraz czytając funkcja przejścia była zawsze zdefiniowana to $\mathcal{A}$ znajduje się w stanie q_m, ponieważ tylko dla q_{2m-1} przejście $'c'$ jest zdefiniowane. Żeby dojść ponownie do q_{2m-1} z q_m potrzebujemy $(2m-1)-m$ przejść $'b'$.

Lemat 4: W słowie z $csync(S)$ pomiędzy każdymi dwoma literkami $'b'$ jest co najmniej $m-1$ literek $'a'$.

Dowód: Analogiczny do Lematu 3.

Ponieważ $csync(S)$ jest niepusty i wszystkie 4 lematy są spełnione to dla dużych n ($n \geq 10$) automat $\mathcal{A}$ spełnia warunki zadania.