Mateusz Basiak, 19.03.2020r.

Definicja Transducer Moore'a to krotka $\langle\Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma\rangle$, gdzie $\langle\Sigma, Q, q_0, \emptyset, \delta\rangle$ jest DFA (z pustym zbiorem stanów akceptujących) i gdzie $\sigma : Q \to \Sigma_1^*$ dla pewnego alfabetu Σ_1. Jeśli $T = \langle\Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma\rangle$ jest transducerem Moore'a to $f_T : \Sigma^* \to \Sigma_1^*$ jest zdefiniowana jako $f_T(\varepsilon) = \varepsilon$ oraz $f_T(wa) = (f_T(w))\sigma(\widehat{\delta}(wa, q_0))$. Transducer Mealy'ego zdefiniowany jest analogicznie, z tą różnicą że $\sigma : Q \times \Sigma \to \Sigma_1^*$ oraz $f_T(wa) = (f_T(w))\sigma(\widehat{\delta}(w, q_0), a)$.
Transducery T i T' są *równoważne* jeśli funkcje f_T i $f_{T'}$ są równe.

Zadanie 78. Pokaż że dla każdego transducera Moore'a istnieje równoważny transducer Mealy'ego. Pokaż że dla każdego transducera Mealy'ego istnieje równoważny transducer Moore'a.

Rozwiązanie
1. Dla każdego transducera Moore'a istnieje równoważny transducer Mealy'ego.
Weźmy dowolny transducer Moore'a $T = \langle\Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma\rangle$. Równoważny mu jest transducer Mealy'ego $T' = \langle\Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma'\rangle$, gdzie dla każdego $q \in Q$ i dla każdego $a \in \Sigma$ relacja σ' jest zdefiniowana jako:

$$\sigma'(q, a) = \sigma(\delta(q, a))$$

Pokażemy teraz równość f_T oraz $f_{T'}$ na dowolnym słowie $w \in \Sigma^*$. Zrobimy to za pomocą indukcji względem długości słowa.
Teza indukcyjna Dla każdego słowa $w \in \Sigma^*$ zachodzi:

$$f_{T'}(w) = f_T(w)$$

Podstawa indukcji

$$f_{T'}(\varepsilon) = \varepsilon = f_T(\varepsilon)$$

Krok indukcyjny Załóżmy, że funkcje f_T i $f_{T'}$ są równe na wszystkich słowach długości k. Weźmy dowolne słowo $v \in \Sigma^*$ długości $k+1$. Niech $a \in \Sigma$ będzie ostatnią literką v. Wówczas $v = wa$ dla pewnego $w \in \Sigma^*$, gdzie w jest długości k, czyli $f_T(w) = f_{T'}(w)$. Stąd:

$$f_{T'}(v) = f_{T'}(wa) = (f_{T'}(w))\sigma'(\widehat{\delta}(w, q_0), a) = (f_T(w))\sigma'(\widehat{\delta}(w, q_0), a) = (f_T(w))\sigma(\delta(a, \widehat{\delta}(w, q_0)))$$

Skoro nasz automat jest deterministyczny, to po przejściu ze słowem wa znajdziemy się jednoznacznie w tym samym stanie, co po przejściu najpierw słowem w, a następnie literką a, czyli $\delta(a, \widehat{\delta}(w, q_0)) = \widehat{\delta}(wa, q_0)$. Ostatecznie:

$$f_{T'}(v) = (f_T(w))\sigma(\delta(\widehat{\delta}(w, q_0), a)) = (f_T(w))\sigma(\widehat{\delta}(wa, q_0)) = f_T(wa) = f_T(v)$$

Z indukcji wynika, że f_T i $f_{T'}$ są równe na każdym słowie nad Σ^*, a więc transducery T i T' są równoważne. Z dowolności wyboru T otrzymujemy, że dla każdego transducera Moore'a istnieje równoważny transducer Mealy'ego.

2. Dla każdego transducera Mealy'ego istnieje równoważny transducer Moore'a.
Weźmy dowolny transducer Mealy'ego $T = \langle\Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma\rangle$. Równoważny mu jest transducer Moore'a $T' = \langle\Sigma, \Sigma_1, Q_1, q_{0,0}, \delta_1, \sigma_1\rangle$, gdzie:

- $Q_1 = \{q_{0,0}\} \cup \{q_{i,j} : q_i \in Q \wedge j \in \Sigma\}$
- δ_1 zdefiniowana jest następująco:
  dla każdego $j \in \Sigma$ definiujemy $\delta_1(j, q_{0,0}) = q_{0,j}$
  dla każdych $j_1, j_2 \in \Sigma$ oraz dla każdych $q_{i_1,j_1}, q_{i_2,j_2} \in Q_1$ formuła $\delta_1(j_2, q_{i_1,j_1}) = q_{i_2,j_2}$ zachodzi w.t.w., gdy $\delta(j_1, q_{i_1}) = q_{i_2}$
- dla każdego $q_{i,j} \in Q_1$ funkcja σ_1 jest zdefiniowana jako $\sigma_1(q_{i,j}) = \sigma(q_i, j)$

Intuicyjnie każdy ze stanów $q_{i,j}$ poza stanem początkowym reprezentuje parę: stan q_i z transducera T i literka j, która jest kolejną literką w słowie.
Pokażemy teraz równość f_T oraz $f_{T'}$ na dowolnym słowie $w \in \Sigma^*$. Zrobimy to za pomocą indukcji względem długości słowa. Aby to udowodnić, trzeba nieco wzmocnić tezę indukcyjną.

Teza indukcyjna Dla każdego słowa $w \in \Sigma^*$ zachodzi:

$$f_{T'}(w) = f_T(w)$$

oraz dla każdego $j \in \Sigma$:

$$\widehat{\delta_1}(wj, q_{0,0}) = q_{i,j} \implies \widehat{\delta}(w, q_0) = q_i$$

Podstawa indukcji

$$f_{T'}(\varepsilon) = \varepsilon = f_T(\varepsilon)$$

Weźmy dowolne $j \in \Sigma$.

$$\widehat{\delta_1}(\varepsilon j, q_{0,0}) = \delta_1(j, q_{0,0}) = q_{0,j}$$

$$\widehat{\delta}(\varepsilon, q_0) = q_0$$

Czyli druga część tezy zgadza się dla $i = 0$.

Krok indukcyjny Załóżmy, że teza indukcyjna zachodzi dla wszystkich słów $x \in \Sigma^*$ długości k. Weźmy dowolne słowo $v \in \Sigma^*$ długości $k+1$. Niech $a \in \Sigma$ będzie ostatnią literką v. Wówczas $v = wa$ dla pewnego $w \in \Sigma^*$, gdzie w jest długości k, czyli $f_T(w) = f_{T'}(w)$. Stąd:

$$f_{T'}(v) = f_{T'}(wa) = (f_{T'}(w))\sigma_1(\widehat{\delta_1}(wa, q_{0,0})) = (f_T(w))\sigma_1(\widehat{\delta_1}(wa, q_{0,0}))$$

Oznaczmy $q_{i,a} = \widehat{\delta_1}(wa, q_{0,0})$. Z drugiej części założenia indukcyjnego dla słowa w dostajemy

$$\widehat{\delta}(w, q_0) = q_i$$

Stąd od razu:

$$f_{T'}(v) = (f_T(w))\sigma_1(\widehat{\delta_1}(wa, q_{0,0})) = (f_T(w))\sigma_1(q_{i,a}) = (f_T(w))\sigma(q_i, a) =$$

$$= (f_T(w))\sigma(\widehat{\delta}(w, q_0), a) = f_T(wa) = f_T(v)$$

Czyli udowodniliśmy pierwszą część tezy indukcyjnej.
Weźmy teraz dowolne $b \in \Sigma$. Oznaczmy przez $q_{j,b}$ stan

$$q_{j,b} = \widehat{\delta_1}(wab, q_{0,0}) = \delta_1(b, \widehat{\delta_1}(wa, q_{0,0})) = \delta_1(b, q_{i,a})$$

Wówczas z definicji δ_1 dostajemy $\delta(a, q_i) = q_j$. Stąd ostatecznie:

$$\widehat{\delta}(wa, q_0) = \delta(a, \widehat{\delta}(w, q_0)) = \delta(a, q_i) = q_j$$

To daje nam drugą część tezy indukcyjnej.
Z indukcji wynika, że f_T i $f_{T'}$ są równe na każdym słowie nad Σ^*, a więc transducery T i T' są równoważne. Z dowolności wyboru T otrzymujemy, że dla każdego transducera Mealy'ego istnieje równoważny transducer Moore'a.