

Języki formalne i złożoność obliczeniowa
Beata Janiak, 29.03.2020

Zadanie 55 Czy zbiór takich słów nad alfabetem $\{0,1\}$, które mają parzystą długość, i w których pierwszej połowie jest przynajmniej tyle samo jedynek, co w drugiej połowie, jest bezkontekstowy?

Rozwiązanie:

Taki zbiór słów nie jest językiem bezkontekstowym.

Dowód:

Założmy nie wprost, że jest to język bezkontekstowy. Oznaczmy go przez L . Zachodziłby więc dla niego lemat o pompowaniu. Przez p oznaczmy stałą z tego lematu. Niech $s = 0^p 1^p 0^p 1^p$. Skoro $|s| \geq p$ i $s \in L$ wtedy musiałby istnieć dla niego podział $s = uvxyz$, taki że $|vy| > 0$, $|vxy| \leq p$ oraz $\forall i \geq 0 \quad uv^i xy^i z \in L$. Pokażemy, że bez względu na podział, powyższe warunki nie zachodzą.

Zauważmy, że jeśli vy jest nieparzystej długości to słowo $uv^0 xy^0 z = uxz$ będzie również nieparzystej długości, czyli nie będzie mogło należeć do języka. Czy używamy tego?

Rozważmy teraz następujące przypadki:

1) vxy zawiera jedynie zera z pierwszej połowy słowa s :

0...0	1...1	0...0	1...1
vxy			

5

Wtedy pompując s do słowa $uv^2 xy^2 z$ spowodujemy, że do drugiej połowy słowa "przejdzie" część jedynek z pierwszej połowy, co skutkuje tym, że w drugiej połowie będzie ich więcej niż w pierwszej czyli otrzymane słowo nie będzie należało do L .

2) v lub y zawiera co najmniej jedną jedynkę z pierwszej połowy słowa s :

0...0	1...1	0...0	1...1
vxy			

Przy podziale słowa $uv^0 xy^0 z = uxz$ na połowę możemy zauważyć, że liczba jedynek w drugiej połowie nie ulegnie zmniejszeniu, zaś liczba jedynek w pierwszej połowie zmaleje. W rezultacie otrzymane słowo również nie będzie mogło należeć do L .

3) vxy zawiera jedynie zera z drugiej połowy słowa s :

0...0	1...1	0...0	1...1
		vxy	

Wystarczy rozpatrzyć słowo $uv^0 xy^0 z = uxz$. Część jedynek w pierwszej połowie "przejdzie" do drugiej i w ten sposób otrzymamy sprzeczność.

4) v lub y zawiera co najmniej jedną jedynkę z drugiej połowy słowa s :

0...0	1...1	0...0	1...1
		vxy	

W tym przypadku "pompujemy w górę" - w przypadku słowa $uv^2 xy^2 z$ zwiększymy liczbę jedynek jedynie w drugiej części otrzymanego słowa w stosunku do s , zaś liczba jedynek w pierwszej części słowa nie ulegnie zmianie.

Reasumując dla dowolnego podziału będzie istniało takie pompowanie, że otrzymane słowo nie będzie mogło należeć do L . Dowodzi to sprzeczności założenia o bezkontekstowości języka L i kończy dowód.