Języki formalne i złożoności obliczeniowe
Beata Janiak, 18.03.2020

Zadanie 42 Czy relacja mnożenia jest automatyczna?
Przez relację mnożenia rozumiemy tu $\{< a, b, c > \in \mathbb{N}^3 : ab = c\}$

Rozwiązanie:
Relacja mnożenia R nie jest automatyczna.

Dowód:
Załóżmy nie wprost, że R jest relacją automatyczną. Czyli język L_R jest regularny. Istnieje więc DFA A, taki że $L_A = L_R$. Niech n oznacza liczbę stanów tego automatu.

Rozpatrzmy teraz zbiór słów:

$$\{< 0,0,0 >^k < 0,1,0 >< 0,0,0 >^{n+1-k} < 1,0,0 >: k = 1, ..., n+1\} =$$
$$= \{< 0,0,0 > \overbrace{< 0,1,0 >< 0,0,0 >< 0,0,0 > ... < 0,0,0 >}^{n+1} < 1,0,0 >;$$
$$< 0,0,0 >< 0,0,0 >< 0,1,0 >< 0,0,0 > ... < 0,0,0 >< 1,0,0 >;$$
$$...$$
$$< 0,0,0 >< 0,0,0 >< 0,0,0 >< 0,0,0 > ... < 0,1,0 >< 1,0,0 >\}$$

Jest to równoważne rozpatrywaniu iloczynów w systemie binarnym
$2^{n+2} \cdot 2^k$ dla $k = 1, ..., n+1$

Schemat mnożenia pisemnego słów z rozpatrywanego zbioru (krotki zapisane pionowo od końca) wyglądałby następująco:

$$\begin{array}{c} 1\overbrace{00...000...00}^{n+1}0 \\ 000...010...000 \\ \hline 000...000...000 \end{array}$$

Wszystkich takich słów (w tym zbiorze) jest $n+1$. Zatem na mocy zasady szufladkowej Dirichleta istnieją takie dwa różne słowa w i v należące do tego zbioru, po przetworzeniu których DFA A znajdzie się w tym samym stanie. Przez i oznaczmy pozycję (liczoną od zera) krotki $< 0,1,0 >$ w słowie w, zaś przez j jej pozycję (również liczoną od zera) w słowie v. Bez straty ogólności załóżmy, że $i > j$.
Niech z będzie słowem składającym się z $n+3$ krotek, którego i-tą krotką (licząc od zera) jest $< 0,0,1 >$, pozostałymi zaś $< 0,0,0 >$.

$$\begin{array}{l} wz \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i \quad j \\ \quad 000...0\mathbf{0}0...000...000|100...0\mathbf{0}0...0\mathbf{0}0...000 \\ \quad 000...0\mathbf{0}0...000...000|000...0\mathbf{1}0...0\mathbf{0}0...000 \\ \hline \quad 000...0\mathbf{1}0...000...000|000...0\mathbf{0}0...0\mathbf{0}0...000 \\ \qquad n+2+i \end{array}$$

$$\begin{array}{l} vz \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i \quad j \\ \quad 000...0\mathbf{0}0...000...000|100...0\mathbf{0}0...0\mathbf{0}0...000 \\ \quad 000...0\mathbf{0}0...000...000|000...0\mathbf{0}0...0\mathbf{1}0...000 \\ \hline \quad 000...0\mathbf{1}0...000...000|000...0\mathbf{0}0...0\mathbf{0}0...000 \\ \qquad n+2+i \end{array}$$

Wtedy $wz \in L$, natomiast $vz \notin L$ co dowodzi sprzeczności i kończy dowód.