Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa

Wojciech Jarząbek

5 kwietnia 2020

Zadanie 75

Definicje

Niech $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, a $P \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ będzie najmniejszą symetryczną relacją spełniającą:

- $\forall_{w \in \Sigma^*}\ P(w, \epsilon)$
- $\forall_{a \in \Sigma}\ \forall_{w,v \in \Sigma^*}\ P(w, v) \implies P(aw, av)$

Dla $L \subseteq \Sigma^*$ niech $L_{p/q} = \{w \in \Sigma^* \mid \exists_{v \in L}\ P(w, v)\ \wedge\ |w|\ /\ |v| = p\ /\ q\}$

Treść zadania

Niech $L \subseteq \Sigma^*$ będzie regularny. Czy wynika z tego, że:

a) język $L_{3/2}$ jest regularny?

b) język $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_{1/i}$ jest regularny?

Rozwiązanie podpunktu a) (odpowiedź: NIE)

Niech $L = a^*$. Weźmy $w \in L_{3/2}$ takie, że $w = a^{2n}b^n$. Język L jest regularny, lecz słowo w, mimo spełnienia warunku z definicji (wystarczy ustalić $v = a^{2n}$), nie może być rozpoznane przez DFA, co łatwo zauważyć na przykładzie języka $a^n b^n$. Wniosek: $L_{3/2}$ nie jest regularny.

Rozwiązanie podpunktu b) (odpowiedź: TAK)

Zauważmy, że $L_{1/1}$ to po prostu L. Zatem $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_{1/i} = L \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} L_{1/i}$.

Potrzebujemy wykazać, że prawa część sumy jest regularna. Aby ułatwić pracę, zmienimy definicję $L_{1/i}$ na równoważną:

$$L_{1/i} = \{w \in \Sigma^* \mid \exists_{v \in L}\ wv \in L\ \wedge\ |v| = i|w|\}$$

Niech $A = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ będzie DFA rozpoznającym L.
Skonstruujmy automat $\tilde{A} = \langle \Sigma, \tilde{Q}, \tilde{q_0}, \tilde{F}, \tilde{\delta} \rangle$ rozpoznający $\bigcup_{i=2}^{\infty} L_{1/i}$:

- $\tilde{Q} = Q \times \mathcal{P}(Q)^{\mathcal{P}(Q)}$, gdzie $\mathcal{P}(Q)$ to zbiór potęgowy Q
- $\tilde{q_0} = \langle q_0, \mathrm{id}\rangle$, gdzie id to funkcja identyczności
- $\tilde{\delta}(\langle q, f\rangle, a) = \langle \delta(q, a),\ g\rangle$, gdzie $g = \lambda X \to \{\delta(x, b) \mid x \in f(X),\ b \in \Sigma\}$
- $\tilde{F} = \{\langle q, f\rangle \in \tilde{Q} \mid \exists_{i\in\mathbb{N}}\ f^i(\{q\}) \cap F \neq \emptyset\}$

Podsumowując: $f^n(\{q\})$ to zbiór stanów, w których mógłby się znaleźć automat A poprzez wczytywanie słowa długości $n|w|$, rozpoczynając od stanu q. Stan $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ automatu $\tilde{A}$ jest akceptujący, jeżeli dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ w zbiorze $f^k(\{q\})$ znajduje się co najmniej jeden stan akceptujący $q \in F$ z automatu A.

Z konstrukcji automatu $\tilde{A}$ wynika, że rozpoznaje on język $\bigcup_{i=2}^{\infty} L_{1/i}$. Oznacza to, że język $L \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} L_{1/i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_{1/i}$ jest regularny.