Michał Wierzbicki 30 marca 2020
Zadanie 16.

1 Treść zadania

Zadanie 16. Czy istnieje wyrażenie regularne ϕ, oznaczające jakiś niepusty język regularny, takie że $L_{a\phi} = L_{\phi b}$? Czy istnieje wyrażenie regularne ϕ, oznaczające jakiś niepusty język regularny, takie że $L_{a^*\phi} = L_{\phi b^*}$?

2 Rozwiązanie

$L_{a\phi} = L_{\phi b}$ W treści pytania o tę równość pojawiają się dwa języki, $L_{a\phi}$ oraz $L_{\phi b}$. Pierwszy z nich to język słów generowanych przez jakieś wyrażenie regularne ϕ z doklejoną literą a na początku każdego z nich. Natomiast drugi język opisuje wszystkie słowa, które można wyprodukować z wyrażenia regularnego ϕ, z tym że w tym przypadku na końcu każdego z nich doklejona jest literka b. Na początku zauważmy, że aby równość $L_{a\phi} = L_{\phi b}$ zachodziła, to ϕ musi spełniać dwa warunki:

1. Słowa produkowane przez ϕ muszą zaczynać się na literę a, tak aby słowa z $L_{\phi b}$ znalazły swoje odzwierciedlenie w języku $L_{a\phi}$,

2. Słowa produkowane przez ϕ muszą kończyć się na literę b, żeby słowa z $L_{a\phi}$ mogły się odnaleźć w języku $L_{\phi b}$.

Warunki te muszą zachodzić równocześnie.
Załóżmy nie wprost, że istnieje wyrażenie regularne ϕ, takie że $L_{a\phi} = L_{\phi b}$. Niech w będzie słowem z L_ϕ o najmniejszej liczbie liter a (oznaczmy tę liczbę k). Wiemy, że ono istnieje ponieważ ϕ jest niepustym wyrażeniem regularnym. W takim razie słowo $wb \in L_{\phi b}$. Jednak, aby zachodziła równość $L_{a\phi} = L_{\phi b}$ to słowo aw powinno należeć do $L_{a\phi}$, jednak wtedy zaczynałoby się $k+1$ literami a. Z powyższego wynika, że $L_{a\phi} \neq L_{\phi b}$, więc nie istnieje takie ϕ dla którego zachodziłaby równość.

$L_{a^*\phi} = L_{\phi b^*}$ Rozważmy wyrażenie regularne $\phi = a^*b^*$. Wtedy $L_{a^*\phi} = L_{a^*a^*b^*} = L_{a^*b^*} = L_{a^*b^*b^*} = L_{\phi b^*}$. Zatem rozważana równość zachodzi.