Rozwiązanie zadania 42

Marcin Rogala 300084

19 marca 2020

1 Wstep

Zdefiniujmy funkcję $l : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ jako: $l(\epsilon) = \epsilon$, $l(0w) = 2l(w)$, $l(1w) = 2l(w) + 1$.
Dla liczby k zdefiniujmy $\Sigma_k = \{0,1\}^k$.
Dla liczb naturalnych $j \leqslant k$ zdefiniujemy funkcję $\Pi_k^j : \Sigma_k^* \to \{0,1\}^*$ jako $\Pi_k^j(\epsilon) = \epsilon$,
$\Pi_k^j(\langle a_1, a_2, \dots a_j, \dots a_k \rangle w) = a_j \Pi_k^j(w)$, gdzie $\langle a_1, a_2, \dots a_j, \dots a_k \rangle \in \Sigma_k$.

Relacje $R \subseteq \mathbb{N}^k$ nazywamy automatyczną, jeśli język L_R złożony z tych słów $w \in \Sigma_k^*$, dla których zachodzi $R(l(\Pi_k^1(w)), l(\Pi_k^2(w)), \dots l(\Pi_k^k(w)))$, jest regularny.

Zadanie 42. Czy relacja mnożenia jest automatyczna. Przez relacją mnożenia rozumiemy tu $\{\langle a, b, c \rangle \ \in \mathbb{N}^3 : ab = c\}$.

2 Rozwiązanie

Załóżmy nie wprost, że relacja mnożenia jest automatyczna, czyli język L_R jest regularny. Wtedy, z lematu o pompowaniu istnieje taka stała n, że dla każdego słowa $w \in L_R$ takiego, że $|w| > n$, istnieje $xyz \in \Sigma^*$ takie, że $xyz = w, |y| \neq \epsilon, |xy| \leqslant n$ oraz takie, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $xy^kz \in L_R$.
Weźmy krotkę M postaci $\langle 2^l, 2^l, 2^{2l} \rangle, 2l+1 > 2n$. M należy do relacji mnożenia. Słowo w_M należące do języka L_R, reprezentujące M, to ciąg $m_0, m_1, \dots, m_{2l}$, gdzie m_i to krotka $\langle a_i, b_i, c_i \rangle$ – i-te bity liczb z krotki M.

$$w_M = \underbrace{\langle 0,0,0 \rangle \cdots \langle 0,0,0 \rangle}_{l} \langle 1,1,0 \rangle \underbrace{\langle 0,0,0 \rangle \cdots \langle 0,0,0 \rangle}_{l-1} \langle 0,0,1 \rangle$$

Część y podziału słowa składa się tylko z krotek postaci $\langle 0,0,0 \rangle$. Słowo xy^2z nie należy do relacji mnożenia, ponieważ $2^{l+|y|} * 2^{l+|y|} = 2^{2l} * 2^{2|y|} \neq 2^{2l+|y|}$. Język L_R nie jest regularny.