Algorytmy Kwantowe
Lista 5

Zadanie 1 [**Operator Dyfuzji**]

Trudność: łatwe — Punktów: 2

Zbuduj obwód kwantowy realizujący macierz

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

(wszędzie poza przekątną są zera). Obwód może korzystać z bitów pomocniczych.

Zadanie 2 [**Deutsch-Jozsa**]

Trudność: średnie — Punktów: 4

Dostajemy obwód realizujący funkcję $f : [N] \to \{0, 1\}$, o której wiemy, że

1. Albo zwraca zero na każdym wejściu,
2. Albo jest zbalansowana, czyli zwraca zero na $N/2$ wejść i jeden na $N/2$ wejść.

Zbuduj obwód kwantowy, który pozwoli odróżnić te przypadki (z prawdopodobieństwem równym 1). Na ilu wejściach trzeba by odpytać funkcję f w modelu klasycznym?

Zadanie 3

Trudność: średnie — Punktów: 2

Zaproponuj klasyczny algorytm zrandomizowany, który odpyta funkcję f na dwóch wejściach i odpowie poprawnie z prawdopodobieństwem przynajmniej $\frac{2}{3}$.

Zadanie 4

Trudność: średnie — Punktów: 2

Funkcja $f : [N] \to \{0, 1\}$ spełnia następującą obietnicę:

(1) Na pierwszej $N/2$ wejść zwraca 0, a na drugiej $N/2$ wejść 1, albo

(2) Na pierwszej $N/2$ wejść zwraca tyle samo zer co jedynek, podobnie na drugiej.

Jak zmodyfikować algorytm z Deutscha-Jozsy (z poprzedniego zadania), by odróżnić te przypadki?

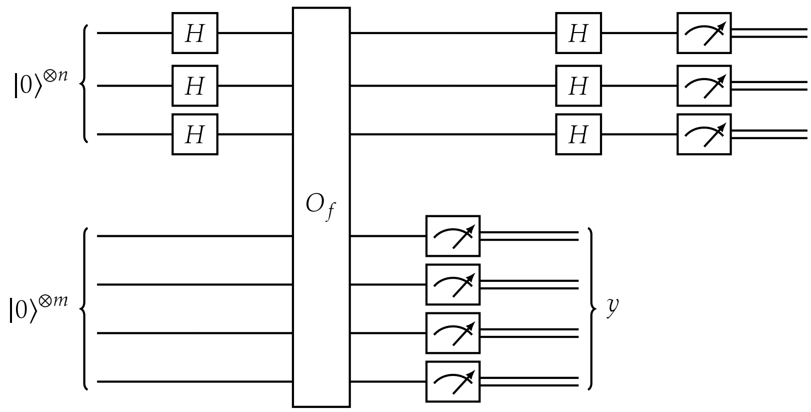
Zadanie 5 [**Problem Simona**]

Trudność: trudne — Punktów: 5

Dostajemy wyrocznię $O_f^{\pm}$ dla funkcji $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}^m$, o której obiecano nam:

(i) f jest 2-do-1, czyli na każdy element z obrazu f wskazują dokładnie dwa argumenty.

(ii) $\exists_{s \in [N] \setminus \{\mathbf{0}\}} \forall_{x \in [N]} \; f(x) = f(x \oplus s)$.



Naszym celem jest znalezienie wektora s. W obwodzie na rysunku użyto wyroczni O_f, którą skonstruowaliśmy w zadaniu 10 z listy pierwszej. Jaką informację daje on nam na temat s-a? Ile razy musimy go odpalić, żeby wydedukować s?

Zadanie 6 [Forrelation]

Trudność: łatwe — Punktów: 2

Dla funkcji $f, g : \{0,1\}^n \to \{-1,1\}$ zdefiniujemy miarę *forrelacji* (korelacji z Fourierem) jako

$$\Psi_{f,g} = \frac{1}{\sqrt{2^n}^3} \sum_{x,y \in [2^n]} f(x)(-1)^{x \cdot y} g(y),$$

gdzie $x \cdot y$ to normalny iloczyn skalarny.

Dostajemy funkcje f i g, o których obiecano nam, że wpadają w jeden z przypadków:

(1) $\Psi_{f,g} \geqslant \frac{3}{5}$, albo

(2) $|\Psi_{f,g}| \leqslant \frac{1}{15}$.

Zaprojektuj obwód kwantowy, który korzysta z $O_f^{\pm}$ oraz $O_g^{\pm}$ po $\mathcal{O}(1)$ razy i pozwala odróżnić te przypadki ze stałym[1] prawdopodobieństwem błędu.

Zadanie 7

Trudność: trudne — Punktów: 4

Rozwiązujemy to samo zadanie, co przed chwilą, ale tym razem dysponujemy obwodem $\mathsf{CONTROLLED}{-}O^{\pm}_{f,g}$, który przyjmuje $n+1$ bitów i aplikuje na n bitach funkcję f lub g w zależności od wartości bitu kontrolnego. Obwód ten możemy wykorzystać tylko jednokrotnie.

Skonstruuj algorytm, który odpowie TAK z prawdopodobieństwem $\frac{1+\Psi_{f,g}}{2}$, a NIE z pozostałym.

Zadanie 8

Trudność: łatwe — Punktów: 1

Zmodyfikuj powyższy algorytm tak, by zarówno w przypadku (1) jak i (2) zwracał poprawną odpowiedź z prawdopodobieństwem 60%.

Zadanie 9

Trudność: średnie — Punktów: 3

Dla funkcji $f_1, \ldots, f_k$ ich *forrelacja* to

$$\Psi_{f_1,\ldots,f_k} = \frac{1}{2^{(k+1)n/2}} \sum_{x_1,\ldots,x_k \in \{0,1\}^n} f_1(x_1)(-1)^{x_1 \cdot x_2} f_2(x_2)(-1)^{x_2 \cdot x_3} \cdots (-1)^{x_{k-1} \cdot x_k} f_k(x_k)$$

[1] Tzn. o stałą lepszym od $\frac{1}{2}$.

Skonstruuj algorytm, który korzysta z $k/2$ odwołań do wyroczni $\textsf{CONTROLLED}{-}O^{\pm}_{f,g}$ dla jakichś f i g i mówi TAK z prawdopodobieństwem $\frac{1+\Psi_{f_1,\dots,f_k}}{2}$.