Rozwiązanie zadania 73

Marcin Rogala 300084

28 marca 2020

1 Wstep

O języku $A \subseteq \Sigma^*$ powiemy, że jest konfluentny, jeśli:

$$\forall w, v \in \Sigma^* \; \exists x \in \Sigma^* \; \forall y \in A\Sigma^* \; (wxy \in \Leftrightarrow vxy \in A).$$

O języku $A \subseteq \Sigma^*$ powiemy, że jest jednostajnie konfluentny, jeśli istnieje taka stała $c \in \mathbb{N}$, że:

$$\forall w, v \in \Sigma^* \; \exists x \in \Sigma^* \; (|x| \leqslant c \land \forall y \in \Sigma^* \; (wxy \in A \Leftrightarrow vxy \in A)).$$

Zadanie 73. Pokaż, że jeśli język regularny jest konfluentny, to jest jednostajnie konfluentny.

2 Rozwiązanie

Relację $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ definiujemy w następujący sposób: $w \sim_L w'$ w.t.w gdy $\forall v \in \Sigma^*(wv \in L \Leftrightarrow w'v \in L)$. Z twierdzenia o indeksie wiemy, że: L jest regularny wtedy i tylko wtedy gdy liczba klas abstrakcji relacji $\sim_L$ jest skończona.

Weźmy język L, który jest regularny i konfluentny. Dzielimy język L na klasy abstrakcji $\sim_L$. Dla każdej klasy abstrakcji możemy wybrać reprezentujące je słowo, ponieważ $w \sim_L w' \Leftrightarrow \forall v \in \Sigma^*(wv \in L \Leftrightarrow w'v \in L)$. Klasy abstrakcji relacji $\sim_L$ oznaczmy przez $K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}$. Reprezentantem K_i jest słowo w_i.
Liczba par klas abstrakcji jest skończona. Dla każdej pary $\langle K_i, K_j \rangle$ z konfluentnosci języka L istnieje słowo $x \in \Sigma^*$ takie, że $\forall y \in \Sigma^* \; (w_i xy \in L \Leftrightarrow w_j xy \in L)$ Niech x_{ij} będzie tym słowem dla $\langle K_i, K_j \rangle$. Ustalmy, że $c = max\{|x_{ij}| : 0 \leqslant i, j < m\}$.
Weźmy dowolne $v_1, v_2 \in \Sigma^*$. Istnieję $i, j \in \mathbb{N}$, że $v_1 \in K_i$ oraz $v_2 \in K_j$. Wtedy, korzystając z konfluentności L oraz definicji relacji $\sim_L$

$$\forall y \in \Sigma^*(v_1 x_{ij} y \in L \Leftrightarrow w_i x_{ij} y \in L \Leftrightarrow w_j x_{ij} y \in L \Leftrightarrow v_2 x_{ij} y \in L)$$

Długość x_{ij} jest mniejsza lub równa c.