JFiZO – rozwiązanie zadania nr 56

J-23

29 marca 2020

Zadanie 56.

Udowodnij, że istnieje taki język bezkontekstowy $L \subseteq \Sigma^*$, że język

$$L/2 = \{w \in \Sigma^* : \exists v \in \Sigma^* \ |w| = |v| \land wv \in L\}$$

nie jest bezkontekstowy.

Dowód. (nie wprost)

Skonstruujemy interesujący nas język nad $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ w następujący sposób:

$$L = \{a^n b^m c^m d^{3n} : n, m > 0\}$$

Jest on bezkontekstowy, przykładowo jest generowany przez gramatykę

$$S \to aXddd$$

$$X \to aXddd \mid bYc$$

$$Y \to bYc \mid \epsilon$$

Załóżmy nie wprost że język $L/2$ zdefiniowany jak w poleceniu jest językiem bezkontekstowym.

Rozważmy strukturę słowa $w \in L/2$. Zgodnie z notacją w definicji $L/2$, v będzie oznaczać drugą połowę słowa (to znaczy $v : wv \in L$).

- $w = a^i$
  Wtedy $v = a^{n-i} b^m c^m d^{3n}$ dla odpowiednich n, m. Podział na równe części jest niemożliwy:
  $$i \leq n \implies i \neq n - i + 2m + 3n$$
- $w = a^n b^i$
  Wtedy $v = b^{m-i} c^m d^{3n}$. Równość połówek można zapisać jako
  $$n + i = (m - i) + m + 3n$$
  lub równoważnie $i = m + n$, co jest sprzeczne z warunkiem $i \leq m$.

- $w = a^n b^m c^i$
  Wtedy $v = c^{m-i} d^{3n}$. Analogiczna równość ma postać

  $$n + m + i = m - i + 3n$$

  to znaczy $i = n$, zatem podział jest możliwy.

- $w = a^n b^m c^m d^i$
  Wtedy $v = d^{3n-i}$. Równość ma postać

  $$n + 2m + i = 3n - i$$

  stąd $i = n - m$, podział jest możliwy.

Na podstawie tych rozważań możemy więc napisać

$$L/2 = \{a^n b^m c^n : n, m > 0\} \cup \{a^n b^m c^m d^{n-m} : 0 < m \leq n\}$$

Nazwijmy te dwa języki składowe odpowiednio L_A i L_B.

Korzystając z założenia że $L/2$ jest CFL możemy zastosować lemat o pompowaniu dla języków bezkontekstowych. Nietrudno się domyślić że spróbujemy znaleźć rozkład dla reprezentanta L_B.

Niech p będzie stałą z lematu o pompowaniu. Weźmy słowo $s \in L_B \subset L/2$ równe

$$s = a^{2p} b^p c^p d^p$$

Z treści lematu wiemy że istnieje pewien podział

$$s = uvxyz$$

taki, że

$$s' = uv^2xy^2z \in L/2$$

Sprawdźmy więc do którego ze składowych języków należy s':

- Przypadek L_A:
  Słowo s' składa się z dokładnie tych samych znaków co s, zatem w szczególności zawiera znak d, stąd nie może należeć do L_A.

- Przypadek L_B:
  Zbadamy, jak musi wyglądać rozkład s by możliwe było „napompowanie" go do słowa z L_B.

  Kluczową obserwacją jest to, że v, y muszą składać się z tylko jednego znaku [1] – w przeciwnym razie ich powtórzenie wprowadziłoby inwersję w kolejności znaków. Zatem możliwe jest naraz zwiększenie liczby maksymalnie dwóch z czterech liter. Mając to na uwadze szukamy operacji

[1] Chodzi tutaj oczywiście o to że są słowami nad jednoliterowymi alfabetami, nie o to że są długości 1.

(realizowanej przez „pompowanie”) która nie zaburzy balansu pomiędzy $|s|_a$ oraz $|s|_b = |s|_c$, to znaczy równości

$$|s|_d = |s|_a - |s|_b = n - m$$

gdzie n, m odpowiadają tym z definicji L_B.

Zwiększenie $|s|_b$ wymusza zmianę o tyle samo $|s|_c$ i vice versa. Niemożliwe jest zatem dodatkowe skorygowanie $|s|_a$ lub $|s|_d$ by przywrócić wspomniany balans. Oznacza to, że zarówno $|s|_b$ jak i $|s|_c$ muszą pozostać niezmienione.

Jedyną alternatywą jest jednoczesne zwiększenie $|s|_a$ oraz $|s|_d$. Jest to niemożliwe, ponieważ wtedy (dla pewnego k)

$$|vxy| = |a^k b^p c^p d^k| > p$$

co stoi w bezpośredniej sprzeczności z warunkiem $|vxy| \leq p$ z lematu.

Na podstawie nieistnienia poprawnego podziału s dochodzimy do sprzeczności, zatem $L/2$ nie jest językiem bezkontekstowym. $\square$