Zadanie 50

> Czy język $L_3 = \{w \in \{0,1,2\}^* : \neg\exists x \in \{0,1,2\}^*, w = xx\}$jest bezkontekstowy?

Rozwiązanie

Język ten jest bezkontekstowy. Najpierw chciałbym zauważyć, że każde słowo z L_3 jest długości parzystej lub nieparzystej - rozważymy więc dwa takie języki

- L_{odd} - podzbiór L_3 składający się ze słów nieparzystej długości
- L_{even} - podzbiór L_3 składający się ze słów parzystej długości

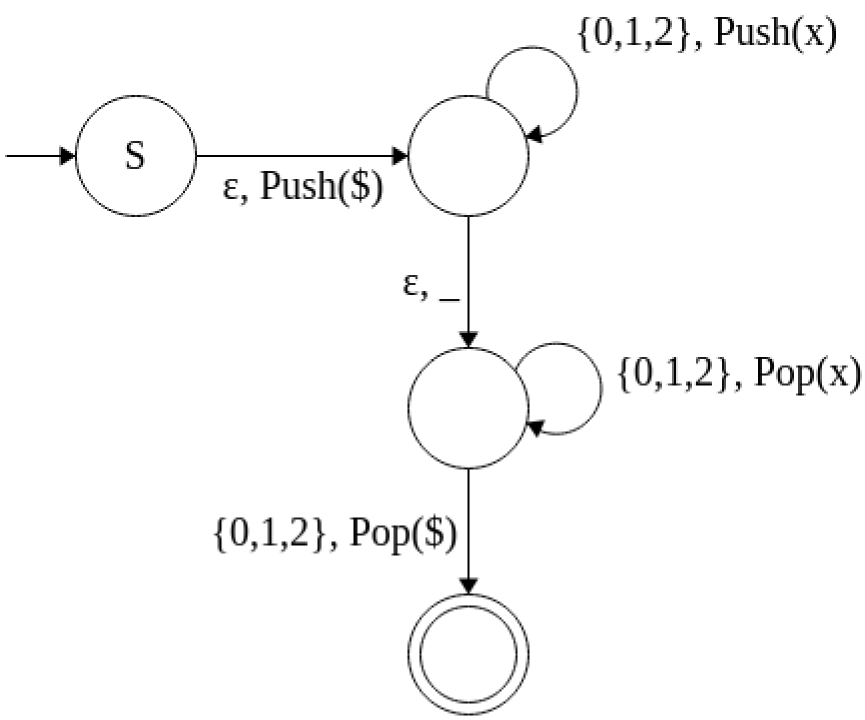
Warto zauważyć, że L_{odd} oraz L_{even} są rozłączne oraz, że $L_{odd} \cup L_{even} = L_3$

Lemat 1

> Jeśli słowo w jest długości nieparzystej to należy do L_3

Jeśli słowo jest długości nieparzystej to nie da się tak go podzielić na 2 równe części (x), żeby otrzymać $w = xx$ - mielibyśmy słowo parzyste.

Patrząc na lemat 1 - dochodzimy do wniosku, że L_{odd} musi zawierać wszystkie słowa nieparzystej długości nad $\{0,1,2\}^*$. Pokażemy więc PDA dla L_{odd}:



Idea tego PDA jest prosta - w pierwszej kolejności oznaczamy dno stosu (na stos kładziemy $). Kolejno odkładamy na stos pewną ilość znaków, potem zdejmujemy dokładnie tyle samo znaków (musimy wyrzucić tyle znaków, żeby dojść do $. Jak dotąd wczytaliśmy parzystą liczbę znaków. Musimy wczytać więc jeszcze jeden znak aby mieć słowo długości nieparzystej (niedeterministycznie określiśmy długość parzystej części słowa) i w ten sposób dotarliśmy do stanu akceptującego.

Stąd widzimy, że L_{odd} jest językiem bezkontekstowym.

Konstrukcja L_{even}

Dla L_{even} również skonstruujemy PDA.

W tym momencie musimy zauważyć, że jeśli słowo $w \in L_3$ to musi istnieć takie k, że
$w = ab \ \wedge \ |a| = |b| \ \wedge \ a_k \neq b_k$

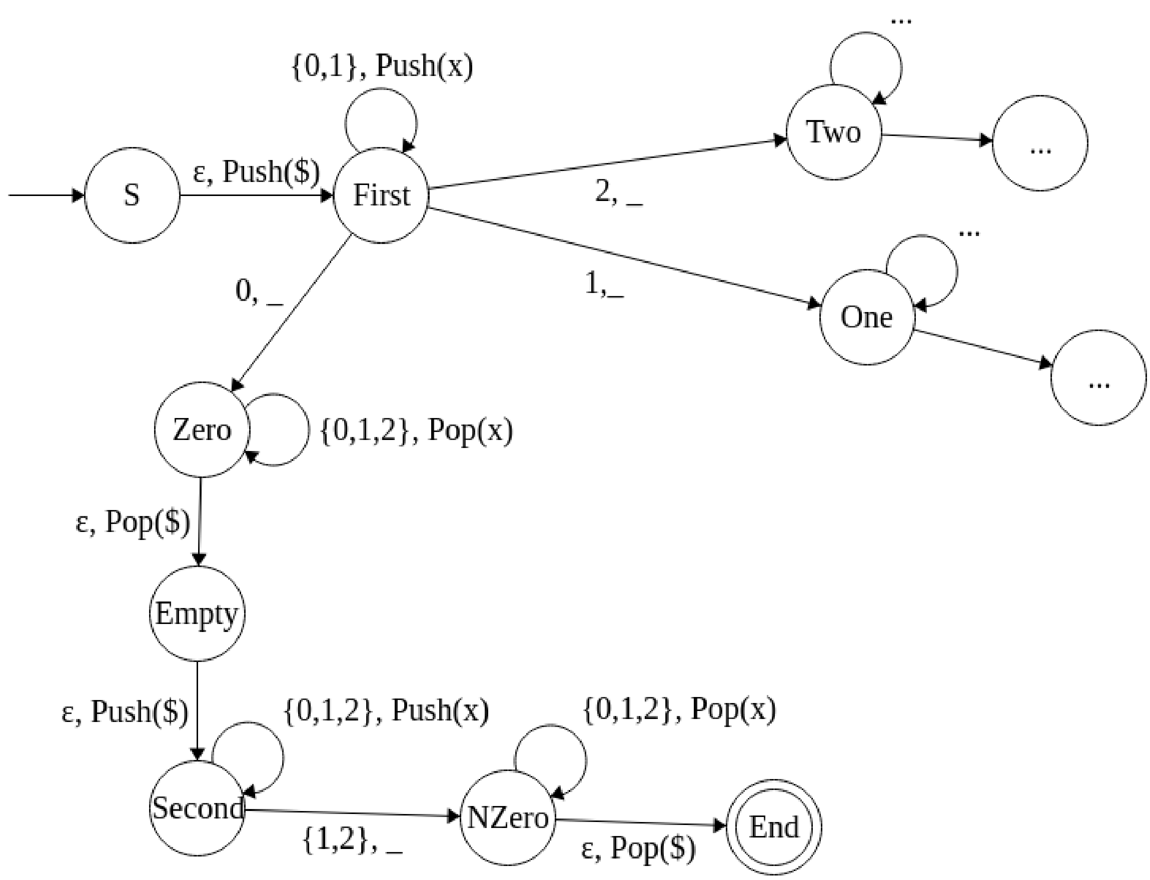
czyli, że słowo x i y różnią się na k-tej pozycji. W naszym PDA k ustalimy niedeterministycznie.

Skorzystamy jednak z następujących obserwacji:

- Jeśli na stosie odłożymy słowo długości x kolejno wczytamy znak d_1 i potem znowu wczytamy x znaków- zdejmując ze stosu odłożoną długość. Znak d będzie wtedy środkową literą słowa $x_1 d_1 x_2$
- Ta sama sytuacja gdy jak będą słowa długości y, wtedy d_2 będzie środkowym elementem tego słowa -$y_1 d_1 y_2$
- Jeśli skonkatenujemy te dwa słowa otrzymamy $x_1 d_1 x_2 y_1 d_2 y_2$ - słowo to ma taką własność, że d_1 jest oddalone od początku słowa o x pozycji, a słowo d_2 jest oddalone również o x pozycji od środka. (to znaczy, że jeśli $w = ab \ \wedge \ |a| = |b|$ to $a_k = d_1$ oraz $b_k = d_2$). Dzieje się tak ponieważ całkowita długość słowa to $2x + 2y + 2$ (btw. słowo długości parzystej), połowa będzie na miejscu $x + y + 1$, to jeśli dodamy x znaków dostaniemy $(2x + 1) + y$ gdzie część w nawiasie to długość słowa $x_1 d_1 x_2$

Mając powyższe obserwacje widzimy, że jak odłożymy długość słowa x_1 na stosie, kolejno wybierzemy znak (d_1) i zdejmiemy x znaków to wrócimy na początek stosu (i mamy literę d_1) i teraz gdy znowu tak zrobimy dla słowa długości y to dostaniemy d_2 i pusty stos.

Korzystając z tego rozumowania skonstruujemy PDA (rozrysowane szczegółowo dla $d_1 = 0$, dla $d_1 \in \{1, 2\}$ analogicznie). - Do stanu akceptującego dochodzimy gdy $d_1 \neq d_2$:



Dlatego też L_{even} jest językiem bezkontekstowym.

Wykrywamy wszystkie słowa, które różnią się na pozycji k-tej (względem początku i środka). Gdyby nie istnało takie k, słowo nie należałby do L_3 - mając to na uwadze. widzimy, że $L_{even} \subseteq L_3$

Wnioski

Żeby zauważyć, że $L_3 \subseteq L_{odd} \cup L_{even}$ wystarczyłoby ponownie rozważyć słowo długości nieparzystej i pokazać, że jest wykrywany przez PDA od L_{odd}, a dla słów długości parzystej pokazać, że jest wykrywane przez PDA dla L_{even} dlatego, że musi istnieć taka k-ta pozycja (względem początku i środka) gdzie słowo z L_3 ma różne znaki.

Skoro $L_3 = L_{odd} \cup L_{even}$ to L_3 też jest językiem bezkontektowym, ponieważ języki kontekstowe są zamknięte ze względu na sumę.