# Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa
# Rozwiązanie zadania 22

Piotr Gdowski

20 marca 2020

**Zadanie 22.** Wiadomo, że $L$ jest językiem regularnym. Pokaż, że w takim razie język

$$L' = \{w : \exists n \in \mathbb{N} \;\; w^n \in L\}$$

też jest językiem regularnym. Przez $w^n$ rozumiemy tutaj słowo $w$ skonkatenowane ze są $n$ razy.

**Rozwiązanie** Język $L'$ jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje deterministyczny automat skończony (DFA) rozpoznający ten język. Wystarczy zatem skonstruować DFA rozpoznający $L'$.

**Lemat 1** Niech $A = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ będzie DFA rozpoznającym $L$, a $w$ dowolnym słowem z $\Sigma^*$. Niech $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n > |Q|$. Wówczas, jeśli $w^n \in L$ , to istnieje $k \leq |Q|$ takie, że $w^k \in L$.

**Dowód lematu 1** Weźmy dowolne $w \in \Sigma^*$. Rozważmy $p_1 = \hat{\delta}(q_0, w^1)$, $p_2 = \hat{\delta}(q_0, w^2)$, ..., $p_{|Q|+1} = \hat{\delta}(q_0, w^{|Q|+1})$. Z zasady szufladkowej Dirichleta istnieją indeksy $i, j$ (bez strat ogólności załóżmy, że $i < j$) takie, że $p_i = p_j$. Skoro $\hat{\delta}(q_0, w^i) = \hat{\delta}(q_0, w^j)$, to $\hat{\delta}(q_0, w^i) = \hat{\delta}(q_0, w^{j+j-i})$, czyli w ogólności dla każdego $i \leq k < j$ i dowolnego $m$ mamy $\hat{\delta}(q_0, w^k) = \hat{\delta}(q_0, w^{k+m(j-i)})$. Niech $n > |Q|$. Wtedy istnieją $k, l$ takie że $n = i + (n - i) = i + k(j - i) + l$, gdzie $l < j - i$ . Wówczas $\hat{\delta}(q_0, w^n) = \hat{\delta}(q_0, w^{i+k(j-i)+l}) = \hat{\delta}(q_0, w^{i+l})$, ale $i + l \leq |Q|$, zatem jeśli $w^n \in L$, to $w^{i+l} \in L$, czego należało dowieść.

**Konstrukcja automatu - idea** Na mocy lematu 1 wiemy, że wystarczy wczytać słowa $w, w^2, ..., w^{|Q|}$, by sprawdzić, czy $w \in L'$. Jednak na wejściu otrzymujemy tylko słowo $w$, bez możliwości jego wielokrotnej konkatenacji. Stąd pomysł na przechowywanie w stanie automatu informacji, dokąd możemy dojść wczytując $w$ zaczynając w dowolnym stanie.

**Konstrukcja automatu** Niech $A' = \langle \Sigma, Q', q_0', F', \delta' \rangle$ DFA mającym rozpoznawać $L'$. Oznaczmy $n = |Q|$. Wówczas $q_0' = (q_0, q_1, ..., q_{n-1})$, natomiast $Q' = Q^n$. Funkcję przejścia $\delta'$ zdefiniujemy następująco: dla $a \in \Sigma$ oraz $(p_0, p_2, ..., p_{n-1}) \in Q'$ mamy

$$\delta'((p_0, p_2, ..., p_{n-1}), a) = (\delta(p_0, a), \delta(p_1, a), ...\delta(p_{n-1}, a)) \tag{1}$$

Dzięki takiej konstrukcji, po wczytaniu słowa $w \in \Sigma^*$ zatrzymamy się w stanie $(\hat{\delta}(q_0, w), \hat{\delta}(q_1, w), ..., \hat{\delta}(q_{n-1}, w))$. Zauważmy, że wystarczy teraz sprawdzić, czy istnieje ciąg stanów, taki że $q_{i_1} = \hat{\delta}(q_0, w)$, $q_{i_2} = \hat{\delta}(q_{i_1}, w)$, ..., $q_{i_k} = \hat{\delta}(q_{i_{k-1}}, w)$ oraz $q_{i_k} \in F$. Będzie to oznaczać, że $w^k \in L$. Stąd definicja $F'$ jest następująca:

$$F' = \{(p_0, p_1, ..., p_{n-1}) \in Q' : \exists_{i_0, i_1, ... i_{n-1}} \ \exists_{k \in \mathbb{N}} \\ i_0 = 0 \ \wedge \ \forall_{j<k} \ p_{i_j} = q_{i_{j+1}} \ \wedge \ q_{i_k} \in F\} \tag{2}$$

**Dowód poprawności** Pokażemy, że $w \in L' \iff w \in L(A')$.

k<|Q|

**1)** $w \in L' \implies w \in L(A')$. Skoro $w \in L'$, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $w^k \in L$. Niech $(p_0, p_1, ..., p_{n-1}) = \hat{\delta}'(q_0', w)$. Wtedy z konstrukcji automatu istnieje ciąg $i_0, i_1, ..., i_k$, że $p_{i_1} = \hat{\delta}(p_{i_0}, w)$, $p_{i_k} = \hat{\delta}(p_{i_{k-1}}, w)$ i $p_{i_k} \in F$. Wówczas $(p_0, p_1, ..., p_{n-1}) \in F'$, czyli $w \in L(A')$.

**2)** $w \in L(A') \implies w \in L'$. Skoro $w \in L(A')$ to istnieje odpowiedni ciąg indeksów $i_0, i_1, ..., i_k$, że $p_{i_1} = \hat{\delta}(p_{i_0}, w)$, $p_{i_k} = \hat{\delta}(p_{i_{k-1}}, w)$ i $p_{i_k} \in F$. Wówczas $w^k \in L$, zatem $w \in L'$.

...

Skonstruowaliśmy skończony automat deterministyczny rozpoznający język $L'$, zatem język $L'$ jest regularny, czego należało dowieść. ■

Bardzo dobrze! Podoba mi się to rozwiązanie. Nie mam uwag.