Mikołaj Kowalik - 283476

Lista 3

Zadanie 39.a

> Niech A= ⟨Σ,Q,q0,F,δ⟩ będzie PDFA.
>
> a. Załóżmy że dla pewnego trzyelementowegoS⊆Qzbiór csync(S) jest niepusty. Pokaż,że w takim razie istnieje w∈csync(S) o długości nie większej niż $2|Q|^3$.

Stwórzmy więc automat rozpoznający słowa $w \in csync(S)$ (ostrożnie synchronizujące automat A - z treści zadania).

$B = \langle \Sigma, Q^3, \langle s_0, s_1, s_2 \rangle, F_B, \delta_b \rangle$, gdzie

- $s_0, s_1, s_3 \in S$ i są różne,
- $F_B = \{\langle q_i, q_i, q_i \rangle : q_i \in Q\}$
- $\delta_b(\langle q_1, q_2, q_3 \rangle, a) = \langle \delta(q_1, a), \delta(q_2, a), \delta(q_3, a) \rangle$, jest to funkcja częściowa - częściowość dziedziczy od δ.

Zauważmy, że jeśli najkrótsze słowo $w \in csync(S)$ jest dłuższe niż $2|Q|^3$ to ścieżka akceptująca musi zawierać pewną ilość takich samych stanów (z zasady szufladkowej - $|Q^3| \leq 2|Q|^3$), a ścieżkę pomiędzy takimi samymi stanami (wraz z jednym powtórznym stanem) można wyciąć (poprzez usunięcie odpowiednich liter z w) i też dostaniemy słowo ostrożnie synchronizujące - sprzeczność z tym, że słowo w jest najkrótsze ze zbioru $csync(s)$.

Zadanie 39.b

> Udowodnij, że jeśli zbiór csync(Q) jest niepusty, to zawiera on jakieś słowo o długości nie większej niż $2^{|Q|}$.

Rozumowanie podobne jak wyżej, z tą różnicą, że nasz automat B, będzie wyglądać

$B = \langle \Sigma, P(Q), \{q_0, \ldots, q_n\}, F_B, \delta_b \rangle$, gdzie

- $F_B = \{\{q_i\} : q_i \in Q\}$
- $\delta_B(R, a) = \{\delta(q, a) : q \in R \subseteq P(Q)\}$

Zauważmy, że jeśli najkrótsze słowo $w \in csync(S)$ jest dłuższe niż $2^{|Q|}$ to ścieżka akceptująca musi zawierać pewną ilość takich samych stanów (z zasady szufladkowej - $2^{|Q|} = |P(Q)| \leq |w|$), a ścieżkę pomiędzy takimi samymi stanami (wraz z jednym powtórznym stanem) można wyciąć (poprzez usunięcie odpowiednich liter z w) i też dostaniemy słowo ostrożnie synchronizujące - sprzeczność z tym, że słowo w jest najkrótsze ze zbioru $csync(s)$.