Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa

Krzysztof Guzik

20 marca 2020

Zadanie 43. Udowodnij, że rzut relacji automatycznej jest relacją automatyczną. Innymi słowy, jeśli $R \subseteq \mathbb{N}^k$ jest relacją automatyczną, to również relacja $R' = \{r \in \mathbb{N}^{k-1} : \exists m \in \mathbb{N}\ \langle r, m\rangle \in R\}$ jest relacją automatyczną (dla uproszczenia możesz przyjąć, że $k = 2$).

Przypomnienie Relację $R \subseteq \mathbb{N}^k$ nazywamy automatyczną, jeśli język L_R złożony z tych słów $w \in \Sigma_k^*$, dla których zachodzi $R(l(\Pi_k^1(w)), l(\Pi_k^2(w)), ...l(\Pi_k^k(w)))$, jest regularny.
Gdzie $\Sigma_k = \{0, 1\}^k$ dla $k \in \mathbb{N}$ oraz o funkcji $l : \{0, 1\}^* \to \mathbb{N}$ wiadomo, że: $l(\varepsilon) = 0, l(0w) = 2l(w), l(1w) = 2l(w)+1$. Natomiast funkcja $\Pi_k^j : \Sigma_k^* \to \{0, 1\}^*$ została zdefiniowana dla liczb naturalnych $j \leqslant k$ jako: $\Pi_k^j(\varepsilon) = \varepsilon, \Pi_k^j(\langle a_1, a_2, ...a_j, ...a_k\rangle w) = a_j\Pi_k^j(w)$, gdzie $\langle a_1, a_2, ...a_j, ...a_k\rangle \in \Sigma_k$.

Szkic Dowodu Mamy udowodnić, że rzut relacji automatycznej jest relacją automatyczną. Wiemy, że relacja jest automatyczne, jeżeli odpowiedni język jest regularny, czyli rozpoznawalny przez pewien automat skończony. Popatrzymy najpierw na to jak zbudowany jest wcześniej wspomniany język L_R, pozwoli nam to zauważyć pewną własność, na podstawie której zbudujemy automat, a następnie udowodnimy, że rozpoznaje on rzut relacji automatycznej.

DFA dla języka L_R Niech $A = \langle\Sigma, Q, q_0, F, \delta\rangle$ będzie deterministycznym automatem skończonym rozpoznającym język L_R oraz niech $P_i = \{q \in Q : \exists j \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists\langle a_1, a_2, ...a_j, ...a_{nk}\rangle \in L_R\ \exists q' \in Q\ \hat{\delta}(q', \langle a_1, a_2, ...a_j\rangle) = q \wedge j \equiv i \pmod k\}$. Innymi słowy, P_i to zbiór takich stanów do których można dojść po j krokach (przy czym $j \in \mathbb{N}\ \wedge j \equiv i \mod k$).

Lemat 1. $\forall i, j \in \mathbb{N}\ j \not\equiv i \pmod k \Rightarrow P_i \cap P_j = \emptyset$

Dowód Nie wprost: jeżeli istniałby stan q należący do obu zbiorów, to istniałoby także słowo $w \in L_R$, które przechodziłoby przez q w kroku $xk + j$ dla $x \in \mathbb{N}$. Moglibyśmy wtedy skonstruować słowo w', dla którego prefix do znaku na pozycji $yk + i - 1$ dla $y \in \mathbb{N}$ mogłby być różny od w, po tym przechodziłoby do stanu q, a sufix obu słów poczynając od tego momentu by się zgadzał. Przez to długość w' nie jest wielokrotnością k, zatem $w' \notin \Sigma_k^* \wedge w' \in L_R$. Ale z definicji relacji automatycznej $L_R \subseteq \Sigma_k^*$. Sprzeczność.

Budowa Automatu Niech $B = \langle \Sigma_B, Q_B, q_{0_B}, F_B, \delta_B \rangle$ będzie niedeterministycznym automatem skończonym, przy czym

- $\Sigma_B = \Sigma$
- $Q_B = Q \setminus P_k$
- $q_{0_B} = q_0$
- $F_B = (F \setminus P_k) \cup \{q \in Q_B : \exists s \in \Sigma \; \delta(q,s) \in F \wedge \delta(q,s) \in P_k\}$
- $\delta_B = \delta|_{Q_B \times \Sigma_B}$
- Dodatkowo dla $q \in P_k$ i dla każdego przejścia $s \in \Sigma$, jeżeli istnieje stan $q' \in Q_B$ dla którego $\delta(q,s) = q'$ to dla wszystkich stanów $q_B \in Q_B$ jeżeli istnieje takie $s' \in \Sigma$ dla którego $\delta(q_B, s') = q$ to $\delta_B(q_B, s) = q'$

$L_{R'} \supseteq L(B)$ Zauważmy, że dla każdego słowo $w \in \Sigma_{k-1}^*$ rozpoznawalnego przez automat B musiało istnieć słowo $w' \in \Sigma_k^*$ rozpoznawalne przez automat A. Dowód: $\forall q \in P_{k-1} \; \forall s \in \Sigma \; \delta(q,s) = q' \Rightarrow q' \in P_k$, a zatem dla każdego stanu q_b, przez który przechodzi automat B i który należy do zbioru P_{k-1} istnieje $s' \in \Sigma$ takie, że $\delta(\delta(q_b, s'), a_b) = \delta(q_b, a_b)$, gdzie a_b to następna litera prefixu słowa w. Przez co możemy zbudować słowo w' przez wstawienie litery s' po każdej literze o indeksie $xk + k - 1$ dla $x \in \mathbb{N}$.
Zatem wszystkie słowa, które rozpoznaje automat B należą do $L_{R'}$.

$L_{R'} \subseteq L(B)$ Niech $w \in L_{R'}$. Istnieje zatem słowo $w' \in L_R$, którego rzut daje słowo w. Skoro automat A akceptowała słowo w', to automat B zaakceptuje słowo w, ponieważ wszystkie przejścia ze stanu $q \in P_i$ do stanu $q' \in P_j$ dla $i, j \in \mathbb{N} \wedge i, j < k$ są takie same, a o istnienie przejścia ze stanu $(q \in P_{k-1}$ do stanu $q' \in P_1$w automacie B zadbaliśmy w ostatnim punkcie Budowy Automatu. Tak samo o stany końcowe zadbaliśmy w czwartym punkcie Budowy Automatu. Zatem wszystkie słowa, które należą do $L_{R'}$ rozpoznaje automat B.

Pokazuje to, że automat B rozpoznaje język $L_{R'}$, przez co relacja R' jest automatyczna, a zatem rzut relacji automatycznej jest relacją automatyczną, c.n.w.