Szymon Mikler

Zadanie 74. Pokaż, że istnieje konfluentny język bezkontekstowy który nie jest jednostajnie konfluentny.

Rozwiązanie. Niech $\Sigma = \{0, 1\}$. Rozważmy $L = \{0^n \Sigma^m : n \geq m \geq 0\}$. Słowo $w \in \Sigma^*$ nie należy do L tylko i wyłącznie wtedy, kiedy w zawiera symbol 1 w pierwszej połowie.

Fakt. *L jest bezkontekstowy.*

Dowód. Wskażę $G = \langle T, N, S, \Pi \rangle$ takie że $L_G = L$.

$N = \{S\}$

$T = \{0, 1\}$

$\Pi = S \to \epsilon | 0S | 0S0 | 0S1$

Opiszę procedurę, która pozwala stworzyć dowolne słowo $w \in L$ za pomocą Π. W i-tym kroku procedury, jeśli i-ty znak słowa w od końca to 1, należy użyć $S \to 0S1$. Jeśli to 0, należy użyć $S \to 0S0$. Jeśli słowo w ma nieparzystą długość, należy użyć (w dowolnym momencie) reguły $S \to 0S$. Po użyciu $S \to \epsilon$ procedura jest zakończona.

Dowolne słowo utworzone za pomocą Π należy do L, bo żadna z operacji w Π nie pozwala na postawienie symbolu 1 w lewej połowie słowa. □

Fakt. *L jest konfluentny.*

Dowód. Dla słów w, v takich że $w \neq v$ weźmy $x = 1^{n+1}$ dla $n = \max\{|w|, |v|\}$. Wtedy słowa wxy i vxy mają w pierwszej połowie przynajmniej jedną 1. Oba słowa nie należą więc do L. □

Definicja. Język A jest jednostajnie konfluentny jeśli istnieje stała $c \in \mathbb{N}$, że:

$$\forall_{w,v \in \Sigma^*} \exists_{x \in \Sigma^*} (|x| \leq c \land \forall_{y \in \Sigma^*} (wxy \in A \Leftrightarrow vxy \in A)) \tag{1}$$

Fakt. *L nie jest jednostajnie konfluentny.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że dla każdych w, v istnieje x o długości mniejszej lub równej c. Niech $w = 1$ i $v = 0^c$. Wiadomo że $w \notin L$ i że $v \in L$. Ponadto nie ma takich sufiksów w, które sprawiłyby, że $wxy \in L$. Stąd, żeby zachodziła równoważność (1) musi zajść $vxy = 0^c xy \notin L$. Słowo $0^c xy$ należy do L, jeśli w pierwszej jego połowie nie ma żadnej 1. Z definicji y jest być dowolnym słowem, np. słowem pustym. Wynika stąd, że najkrótszym x zapewniającym, że $0^c xy$ nie należy do L, jest 1^{c+1}. □