Zadanie 73

Łukasz Wróblewski

Marzec 2020

Definicje: Język L jest konfluentny, gdy:

$$(\forall v, w \in \Sigma^*)(\exists x \in \Sigma^*)(\forall y \in \Sigma^*)(vxy \in L <=> wxy \in L)$$

Język L jest jednostajnie konfluentny, gdy powyższe x są z góry ograniczone, czyli:

$$(\exists c \in \mathbb{N})(\forall v, w \in \Sigma^*)(\exists x \in \Sigma^*, |x| \leqslant c)(\forall y \in \Sigma^*)(vxy \in L <=> wxy \in L)$$

Cel zadania: Regularny język konfluentny jest jednostajnie konfluentny.

Dowód: Weźmy dowolny język regularny L wyznaczany przez DFA A $< \Sigma, Q, q_0, F, \delta >$ o najmniejszej możliwej liczbie stanów. Załóżmy nie wprost, że jest on konfluentny, ale nie jednostajnie.

Zatem x z powyższej definicji mają nieograniczoną długość, czyli istnieje ciąg $(< v_n, w_n, x_n >)_{n \in \mathbb{N}}, v_n, w_n, x_n \in \Sigma^*$, że $(\forall n)(|x_n| > n)$ i x_n są najkrótsze możliwe spełniające własność: $(\forall y \in \Sigma^*)(v_n x_n y \in L <=> w_n x_n y \in L)$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że ciąg ten jest monotonicznie rosnący względem długości x_n, bo z dowolnego ciągu nieograniczonego od góry można wybrać podciąg monotonicznie rosnący. Dodatkowo zauważmy, że w ciągu stanów $(\hat{\delta}(q_0, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$, któryś stan musi występować nieskończenie wiele razy. Stąd bez straty ogólności nasz ciąg spełnia dodatkową własność: $(\forall n)(\hat{\delta}(q_0, v_n) = q_v)$, dla pewnego $q_v \in Q$. Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy dla w_n i otrzymujemy: $(\forall n)(\hat{\delta}(q_0, w_n) = q_w)$, dla pewnego $q_w \in Q$.

Pokażemy, że $v_n x_n \nsim_L v_m x_m$, gdy $n \neq m$, czyli każdy $v_n x_n$ znajduje się w innej klasie abstrakcji relacji $\sim_L$, a skoro jest ich nieskończenie wiele, to z twierdzenia o indeksie otrzymamy sprzeczność z regularnością L.

Załóżmy nie wprost, że pewne $m < n$ spełniają $v_n x_n \sim_L v_m x_m$. Zatem zachodzi też, że $w_n x_n \sim_L w_m x_m$, bo $v_n x_n \sim_L w_n x_n$. Zauważmy, że $\hat{\delta}(q_0, v_n x_n) = \hat{\delta}(q_0, v_m x_m)$ oraz $\hat{\delta}(q_0, v_n x_n) = \hat{\delta}(q_0, v_m x_m)$, bo inaczej A nie byłby minimalny. Dodatkowo z przyjętych własności v_n, v_m, w_n, w_m wnioskujemy, że $\hat{\delta}(q_v, x_n) = \hat{\delta}(q_v, x_m)$ oraz $\hat{\delta}(q_w, x_n) = \hat{\delta}(q_w, x_m)$.

Wówczas dla dowolnego $y \in \Sigma^*$, $\hat{\delta}(q_0, v_n x_n y_n) = \hat{\delta}(q_v, x_n y_n) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_v, x_n), y_n) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_v, x_m), y_n) = \hat{\delta}(q_v, x_m y_n) = \hat{\delta}(q_0, v_n x_m y_n)$ i analogicznie $\hat{\delta}(q_0, w_n x_n y_n) = \hat{\delta}(q_0, w_n x_m y_n)$ ale $|x_m| < |x_n|$, czyli znaleźliśmy krótsze x do warunku konfluentności, co przeczy temu, że x_n było najkrótsze możliwe.