Algorytmy Kwantowe

Lista 1

1. Notacja bra-ket i tortury algebrą liniową

Na wykładzie nie powiedzieliśmy o jednej ważnej operacji matematycznej, którą można wykonać na stanach kwantowych. Wyobraźmy sobie zatem, że mamy dwa zupełnie osobne stany kwantowe (dwa zestawy fotonów, które nigdy się jeszcze nie spotkały), $|u\rangle$ i $|v\rangle$. Chcemy teraz zacząć traktować je jak jeden stan (być może będziemy chcieli je splątać i dokonywać na nich jakichś wspólnych operacji?). Jak z wektorów u i v zrobić wspólny wektor? By odpowiedzieć sobie na to pytanie, wyobraźmy sobie, że oba nasze stany są bazowe.

Przykład. *Niech* $|u\rangle = |01\rangle$, *a* $|v\rangle = |101\rangle$. *Mamy zatem pięć fotonów, a ich wspólny stan to* $|01, 101\rangle = |01101\rangle$.

A co, jeśli jeden ze stanów jest superpozycją?

Przykład. *Niech* $|u\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$, *a* $|v\rangle = |101\rangle$. *Wtedy wspólny stan fotonów to* $\frac{1}{\sqrt{2}}|00, 101\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11, 101\rangle$.

Zatem wspólny stan uzyskuje się poprzez mnożenie elementów wektorów *każdy-z-każdym*, czyli znany nam już iloczyn tensorowy! Kombinacją stanów $|u\rangle$ i $|v\rangle$ jest $|u, v\rangle = |u\rangle|v\rangle = |u\rangle \otimes |v\rangle$.

Zadanie 1

Trudność: łatwe — Punktów: 2

Niech $A \in \mathbb{C}^{k\times l}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ będą dwiema macierzami. Ich iloczyn tensorowy, jak wiemy, jest macierzą skonstruowaną poprzez mnożenie *każdy-z-każdym*:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{1,1}B & \cdots & A_{1,l}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k,1}B & \cdots & A_{k,l}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}B_{1,1} & \cdots & A_{1,1}B_{1,n} & \cdots & A_{1,l}B_{1,1} & \cdots & A_{1,l}B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,1}B_{m,1} & \cdots & A_{1,1}B_{m,n} & \cdots & A_{1,l}B_{m,1} & \cdots & A_{1,l}B_{m,n} \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ A_{k,1}B_{1,1} & \cdots & A_{k,1}B_{1,n} & \cdots & A_{k,l}B_{1,1} & \cdots & A_{k,l}B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k,1}B_{m,1} & \cdots & A_{k,1}B_{m,n} & \cdots & A_{k,l}B_{m,1} & \cdots & A_{k,l}B_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Sprzężenie Hermitowskie macierzy $A = (a_{i,j})$ to macierz $A^\dagger = (\overline{a_{j,i}})$, gdzie $\overline{a+bi} = a - bi$ (sprzężenie liczby zespolonej). Pokaż, że $(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$.

Zadanie 2

Trudność: łatwe — Punktów: 3

Pokaż, że $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ (korzystaliśmy z tego faktu na wykładzie).

Zadanie 3

Trudność: łatwe — Punktów: 2

Pokaż, że jeśli A ma tyle wierszy ile C kolumn, a B tyle wierszy ile D kolumn, to $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.

Zadanie 4

Trudność: łatwe Punktów: 2

Pokaż, że jeśli A i B są macierzami unitarnymi, to $A \otimes B$ też.

Zadanie 5

Trudność: łatwe Punktów: 2

Pokaż, że jeśli $\forall x \in \mathbb{C}^N \, \langle x| M |x\rangle = \langle x|x\rangle$, to M musi być macierzą identycznościową.

Zadanie 6

Trudność: średnie Punktów: 2

Operacja CNOT zamienia stan $|a, b\rangle$ na $|a, a \oplus b\rangle$. Jak wygląda macierz operacji $\sqrt{\mathsf{CNOT}}$, która, zastosowana dwukrotnie, jest równoważna CNOT?

2. Pomiar

Powiedzieliśmy sobie, że jeśli nasz stan kwantowy w przestrzeni zdefiniowanej przez stany bazowe $|0\rangle$, $|1\rangle, \dots, |N-1\rangle$ (stany te mogą odpowiadać ciągom bitów—gdzie każdy bit to polaryzacja pojedynczego fotonu, wtedy $N = 2^n$, gdzie n to liczba fotonów) jest równy $|\phi\rangle = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i |i\rangle$ to stan i zmierzymy z prawdopodobieństwem $|\alpha_i|^2$. A co się stanie ze stanem, gdy zmierzymy tylko jeden qubit (foton)? Na przykład mamy dwa fotony. Pomiar pierwszego daje

$$\begin{cases} |0\rangle, & \text{z prawdopodobieństwem } |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 \\ |1\rangle, & \text{z prawdopodobieństwem } |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 \end{cases}$$

Co się dzieje wtedy z pozostałym stanem kwantowym? To jest niestety bardziej skomplikowane i całego formalizmu, który opisuje takie sytuacje nauczymy się dopiero pod koniec semestru (m.in. dlatego, że wymaga to zdefiniowania, będziemy chcieli zawsze mierzyć wszystko na końcu algorytmu), ale można myśleć, że dzieje się to samo, co z prawdopodobieństwem warunkowym, czyli jeśli z pomiaru wyjdzie $|0\rangle$, to nasz stan zmienia się w

$$|0\rangle \otimes \frac{\alpha_{00}|0\rangle + \alpha_{01}|1\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}.$$

Fizycy nazywają to *redukcją* albo *zapadnięciem się* funkcji falowej.

Zadanie 7

Trudność: łatwe Punktów: 1

Stan GHZ to $\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$. Pokaż, że nie jest on iloczynem tensorowym stanów pojedynczych fotonów (czyli jest splątany).

Zadanie 8

Trudność: łatwe Punktów: 1

Pokaż, że po zmierzeniu jednego z trzech qubitów, stan staje się niesplątany. Niezależnie od wyniku tego pomiaru.

Zadanie 9

Trudność: łatwe Punktów: 1

Stan „W” to $\frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$. Pokaż, że po zmierzeniu jednego qubitu, stan pozostałych dwóch nadal może być splątany.