JFIZO

Zadanie 48

Pokaż, że $L \subseteq \{0\}^*$ jest bezkontekstowy wtedy i tylko wtedy gdy jest regularny.

L jest regularny $\Rightarrow$ L jest bezkontekstowy

To jest łatwe

L jest bezkontekstowy $\Rightarrow$ L jest regularny

Lemat o pompowaniu, dla języka bezkontekstowego nad alfabetem $\{0\}$

Jeśli L jest regularny to istnieje stała p, taka, że jeśli $0^n \in L$ to $n < p$ lub istnieje $q \in \{1, ..., p\}$ takie, że $0^{n+tq} \in L$ dla $t \in N$

Definiujemy podzbiory L

- L_0 – zbiór słów o długości mniejszej niż p
- L_q, dla $q \in \{1, ..., p\}$ – zbiór słów o długości co najmniej p, postaci 0^{n+tq}

Zachodzi równość:

$$L = L_0 \cup \bigcup_{q=1}^{p} \{0^{n+tq} : 0^n \in L_q, t \in N\}$$

Dowód $\subseteq$: Jeśli $w \in L$ to $|w| < p$, więc $w \in L_0$, albo $|w| \geqslant p$, więc $w \in L_q$
Dowód $\supseteq$: Wprost z definicji L_0 i L_q

L_0 jest skończony, więc jest regularny. Musimy jeszcze udowodnić, że dla $q \in \{1, ..., p\}$

$$R_q = 0^{n+tq} : 0^n \in L_q$$

jest regularny. Dla $r \in \{0, ..., q-1\}$ zdefiniujmy

$$R_{q,r} = \{0^{n+tq} : 0^n \in L_q, n \equiv r(mod\ q)\},$$

Wtedy $R_q = \bigcup_{r=0}^{q-j} R_{q,r}$. Udowodnijmy, że $R_{q,r}$ jest regularny.

Jeśli dla żadnego $0^n \in L$ nie zachodzi $n \equiv r(mod\ q)$ to $R_{q,r}$ jest pusty, więc jest regularny. W przeciwnym przypadku, niech $n_{q,r}$ będzie najmniejszym $n \equiv r(mod\ q)$ to $R_{q,r}$ takim, że $0^n \in L$. Wtedy

$$R_{q,r} = \{0^{n_{q,r}+tq}\} = 0^{n_{q,r}}(0^q)^*,$$

więc $R_{q,r}$ jest regularny.