

Rozwiązanie zadania 41

Grzegorz Klocek

March 20, 2020

1 Wprowadzenie

Zdefiniujemy funkcję $l : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{N}$ jako $l(\epsilon) = 0$, $l(0w) = 2l(w)$, $l(1w) = 2l(w) + 1$.

Dla liczby naturalnej k zdefiniujemy $\Sigma_k = \{0, 1\}^k$.

Dla liczb naturalnych $j \leq k$ zdefiniujemy funkcję $\Pi_j^k : \Sigma_k \rightarrow \{0, 1\}^*$ jako: $\Pi_j^k(\epsilon) = \epsilon$, $\Pi_j^k(\langle a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_k \rangle w) = a_j \Pi_j^k(w)$, gdzie $\langle a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_k \rangle \in \Sigma_k$. Relację $R \subseteq N^k$ nazwiemy automatyczną, jeśli język L_R złożony z tych słów $w \in \Sigma_k^*$, dla których zachodzi $R(l(\Pi_1^k(w)), l(\Pi_2^k(w)), \dots, l(\Pi_k^k(w)))$, jest regularny

2 Zadanie

Czy relacja dodawania jest automatyczna? Przez relację dodawania rozumiemy tu $\{\langle a, b, c \rangle \in \mathbb{N}^3 : a + b = c\}$.

3 Rozwiązanie

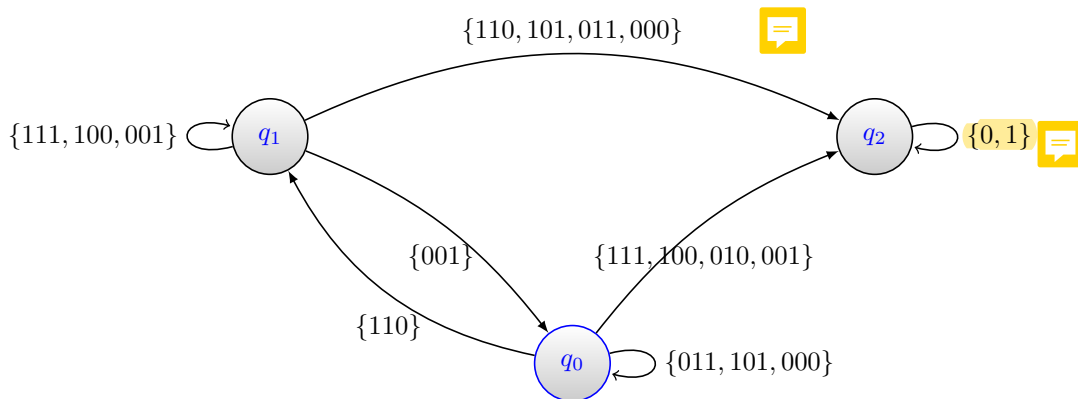
Odpowiedź: Tak, relacja dodawania jest relacją automatyczną. Pokażemy to konstruując deterministyczny automat skończony rozpoznający takie słowa $w \in \Sigma_3^*$ dla których zachodzi $l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) = l(\Pi_3^3(w))$.

Funkcja l dla danego słowa reprezentującego liczbę w zapisie binarnym od tyłu zwraca jego wartość liczbową.

Funkcja Π_k^j zwraca co k -tą literę słowa, zaczynając od j -tej.

3.1 Automat

Uproszczony schemat naszego automat wygląda następująco:

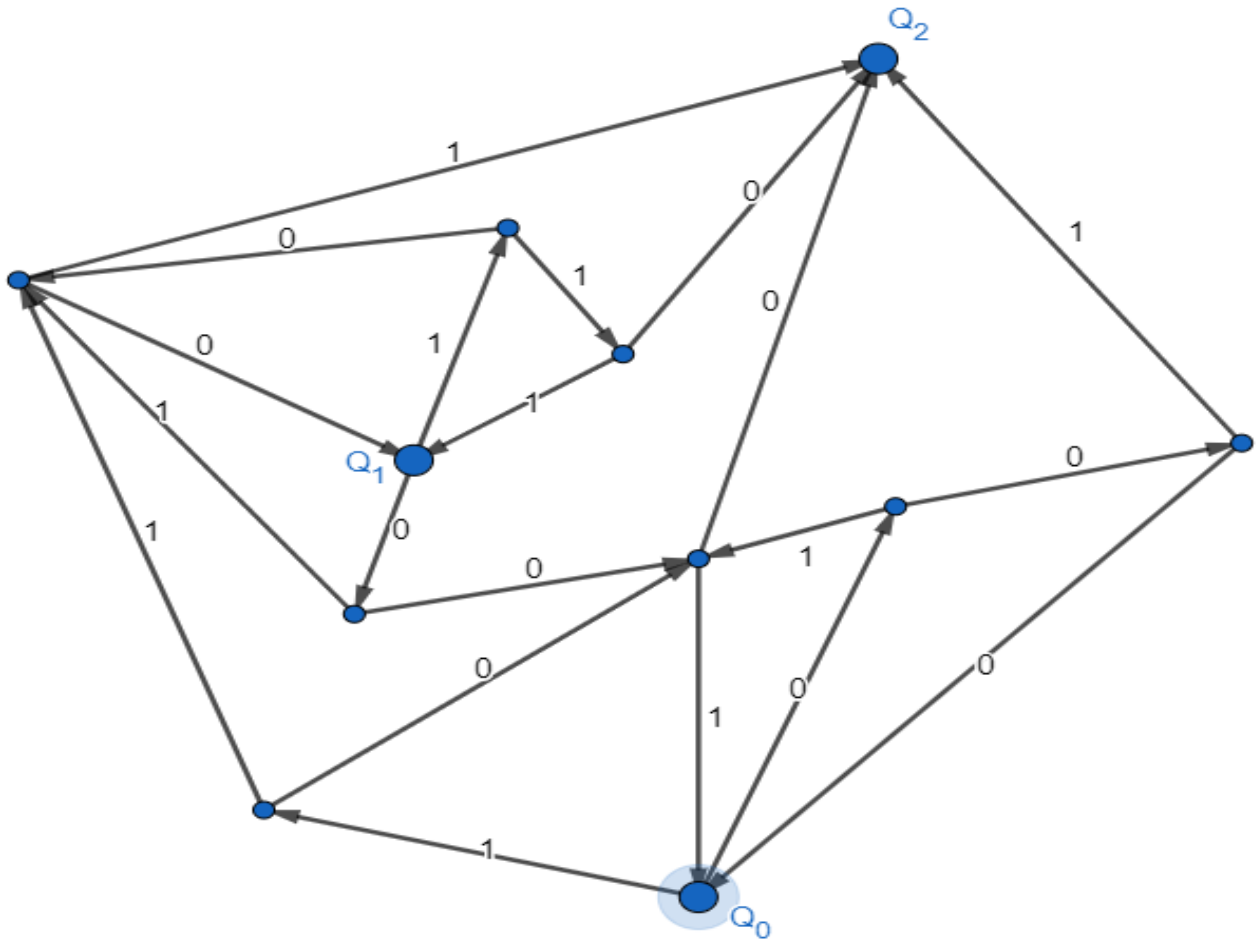


Automat składał z następujących stanów:

- stan akceptujący - q_0

- stan z przeniesieniem 1 - q_1 - stan w do którego będą trafiać takie słowa w , że $w \in \Sigma_3^*$ oraz $l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) = l(\Pi_3^3(w)1)$
- q_2 stan nieakceptujący do którego trafiają słowa z które nie są prefiksem żadnego słowa należącego do relacji dodawania np. 110110 ($a \pmod{100_2} = 11_2$, $b \pmod{100_2} = 11_2$, $c \pmod{100} = 0$, więc niezależnie od dalszych liter $a + b \pmod{100_2} = 10_2 \neq c \pmod{100_2}$)
- pozostałe stany przejściowe (wszystkie na drogach pomiędzy q_1, q_2, q_3 do których trafiają słowa o długości niepodzielnej przez 3).

A tak wygląda schemat automatu:



Rozwiązanie do poprawy z dwóch powodów

1. Błędnie zrozumiana definicja.
2. Brak dowodu poprawności (lub choćby szkicu).