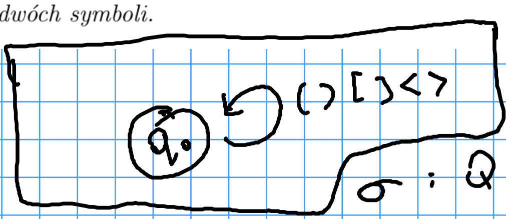
Zadanie 81. Niech $A \subseteq \{(,),[,],\langle,\rangle\}^*$ będzie językiem poprawnie rozstawionych nawiasów trzech rodzajów zaś $B \subseteq \{(,),[,]\}^*$ językiem poprawnie rozstawionych nawiasów dwóch rodzajów. Pokaż że $A \leqslant_{reg} B$. *Wskazówka: każde słowo produkowane przez σ ma się składać z dwóch symboli.*



$$\sigma : Q \times \underbrace{\{(,),[,],\langle,\rangle\}}_{\Sigma} \to \underbrace{\{(,),[,]\}^*}_{\Sigma_1}$$

$$\sigma' : \Sigma \to \Sigma_1^* \qquad \sigma(q_0, a) = \sigma'(a)$$

σ':

$(\to (($ $\qquad) \to))$

$[\to [($ $\qquad] \to)]$

$\langle \to ([$ $\qquad \rangle \to])$

$w \in \Sigma^* \qquad w \in A \iff f_T(w) \in B$

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$: $\quad w \notin A \Rightarrow f_T(w) \notin B$

Udowodnimy jednak wprost. Rozważmy algorytm Alg sprawdzający poprawność nawiasowania słowa, który kolejno wrzuca nawias otwierający na stos. Dla nawiasu zamykającego patrzy na wierzch stosu – jeśli nawiasy się zgadzają to usuwa z wierzchu, jak nie to mówi, że nawiasowanie jest niepoprawne (gdy pusty także). Jeśli dojdzie do końca słowa, akceptuje gdy ma pusty stos.

Algorytm nie akceptuje w. Niech $w = w'v$, gdzie po wczytaniu w' algorytm nie odrzuca a odrzuca w następnym kroku (czyli $v=\varepsilon$ lub po wczytaniu pierwszej litery v).

Z konstrukcji σ wynika, że ten sam algorytm nie odrzuca słowa $f_T(w')$. Rozważmy dwa przypadki:

1) $v=\varepsilon$. Wtedy Alg po wczytaniu $w'=w$ ma na stosie jakieś nawiasy otwierające. Załóżmy, że stos wygląda $\underline{|a_1 a_2 \ldots a_n}$, gdzie $a_1,\ldots,a_n \in \{(, [, \langle\}$. Wtedy Alg po wczytaniu $f_T(w)$ ma stos $\underline{|\sigma'(a_1)\ldots\sigma'(a_n)}$, czyli również nie zaakceptuje.

2) $v \neq \varepsilon$. Niech $v = av'$ i $a \in \{),], \rangle\}$ (gdyż nawias otwierający

nigdy nie odrzuca). Niech S - stos Alg po wczytaniu w.
Jeśli $|S|=0$, to $w \in A$, zatem $f_T(w) \in A$, więc gdy S' - stos Alg po wczytaniu $f_T(w)$, to $|S'|=0$, zatem przy wczytywaniu $f_T(wa)$ Alg napotyka nawias zamykający i pusty stos, czyli odrzuca.
Jeśli $|S| \neq 0$, to niech a' - ostatnia litera na S.
$a'a$ nie jest poprawnie znawiasowane, zatem mamy opcje:

a'	a	ostatnie dwie litery S'	kolejne dwie litery wczytane po $f_T(w')$ w $f_T(w'a)$
(	]	((	)]
(	>	((	])
[	)	[(	))
[	>	[(	])
<	)	([	))
<	]	([	)]

Na pewno zamykamy tym pierwszą literę, która się nie zgadza i spowoduje odrzucenie słowa.