Barbara Zięba

Zadanie 16. Czy istnieje wyrażenie regularne ϕ, oznaczające jakiś niepusty język regularny, takie że $L_{a\phi} = L_{\phi b}$? Czy istnieje wyrażenie regularne ϕ, oznaczające jakiś niepusty język regularny, takie że $L_{a^*\phi} = L_{\phi b^*}$?

Rozwiązanie

- Czy istnieje wyrażenie regularne ϕ, oznaczające jakiś niepusty język regularny, takie że $L_{a\phi} = L_{\phi b}$?

Nie. Weźmy dowolne wyrażenie regularne ϕ, takie że $L_{a\phi} = L_{\phi b}$. Udowodnię indukcyjnie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ każde słowo $w \in L_\phi$ zaczyna się od co najmniej n liter a.
Podstawa indukcji: Dla $n = 0$ teza jest prawdziwa.
Krok indukcyjny: Weźmy dowolne $w \in L_\phi$. Skoro $L_{a\phi} = L_{\phi b}$, to $av = wb$ dla pewnego $v \in L_\phi$. Z założenia indukcyjnego v jest postaci $a^n u$, gdzie $u \in \Sigma^*$. Zatem $a^{n+1}u = wb$, czyli w zaczyna się od $n + 1$ liter a.

To oznacza, że każde słowo w tym języku ma nieskończenie wiele liter a na początku. Skoro do języka należą tylko skończone słowa, to język musi być pusty.

- Czy istnieje wyrażenie regularne ϕ, oznaczające jakiś niepusty język regularny, takie że $L_{a^*\phi} = L_{\phi b^*}$?

Tak. Takim wyrażeniem jest np. a^*b^*, ponieważ $a^*a^*b^* = a^*b^* = a^*b^*b^*$.