Języki formalne i złożoność obliczeniowa, ćwiczenia nr 3

Michał Maksim

Wrocław, dnia 29 marca 2020

1. Zadanie 15

Skorzystajmy ze wskazówki i rozważmy język składający się z jednego słowa:

$$(...((a_0a_1)^2a_2)^2)...)^2$$

Wprowadźmy oznaczenia pomocnicze:

$$w_1 = (a_0a_1)^2 = a_0a_1a_0a_1$$
$$w_2 = (w_1a_2)^2 = w_1a_2w_1a_2$$
$$\vdots$$
$$w_n = (w_{n-1}a_n)^2 = w_{n-1}a_nw_{n-1}a_n$$

Długość tego wyrażenia wynosi:

$$|w_n| = 2|w_{n-1}| + 2 = 2(2|w_{n-2}| + 2) + 2 = O(2^n)$$

Wprowadźmy wyrażenie pomocnicze:

$$p_m = a_0 + \ldots + a_{m-1}$$

Rozważmy teraz następujące wyrażenie w'_n z użyciem symbolu $\cap$:

$$w'_1 = w_1$$
$$w'_2 = (w'_1a_2)^* \cap p_2^*a_2p_2^*a_2$$
$$\vdots$$
$$w'_n = (w'_{n-1}a_n)^* \cap p_n^*a_np_n^*a_n$$

Jego długość wynosi:

$$|w'_n| = |w'_{n-1}| + 2n + c = O(n^2)$$

i jest ono wykładniczo krótsze od w_n.

Musimy pokazać, że wyrażenia w_n i w'_n są równoważne. Zauważmy, że w wyrażeniu w'_n $w'_{n-1}a_n$ zostanie „powtórzone” dwa razy: w'_{n-1} nie zawiera a_n, a w wyrażeniu $p_n^*a_np_n^*a_n$ a_n występuje dokładnie dwa razy.

Rozważmy słowo w'_2:

$$w'_2 = (w_1 a_2)^* \cap (a_0 + a_1)^* a_2 (a_0 + a_1)^* a_2$$
$$w'_2 = (a_0 a_1 a_2)^* \cap (a_0 + a_1)^* a_2 (a_0 + a_1)^* a_2$$

Jedyne słowo należące do przekroju to $a_0 a_1 a_2 a_0 a_1 a_2$, czyli w_2. Zatem $w'_2 = w_2$.
Załóżmy, że $w'_{n-1} = w_{n-1}$ i rozważmy słowo w'_n:

$$w'_n = (w'_{n-1} a_n)^* \cap p_n^* a_n p_n^* a_n$$
$$w'_n = (w_{n-1} a_n)^* \cap (a_0 + \ldots + a_{n-1})^* a_n (a_0 + \ldots a_{n-1})^* a_n$$

Jak już wspomnieliśmy jeśli jakieś słowo należy do przekroju to lewa część powyższego wyrażenia zostanie „wykonana" dwa razy. Aby jakieś słowo należało do przekroju musi być zatem spełnione: $w_{n-1} = p_n^*$. Jedyna taka możliwość jest wtedy gdy p_n^* „generuje" w_{n-1}. Zatem:

$$w'_n = (w_{n-1} a_n)^2 = w_n$$