Barbara Zięba

Zadanie 81. Niech $A \subseteq \{(,),[,],<,>\}^*$ będzie językiem poprawnie rozstawionych nawiasów trzech rodzajów, zaś $B \subseteq \{(,),[,]\}^*$ językiem poprawnie rozstawionych nawiasów dwóch rodzajów. Pokaż że $A \leqslant_{reg} B$. *Wskazówka: każde słowo produkowane przez σ ma się składać z dwóch symboli.*

Rozwiązanie Zdefiniujmy transducer Moore'a $T = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma \rangle$ w następujący sposób:

- $\Sigma = \{(,),[,],<,>\}$
- $\Sigma_1 = \{(,),[,]\}$
- $Q = \{q_0\} \cup \Sigma$
- $\forall_{q \in Q} \forall_{a \in \Sigma} \delta(q,a) = a$, czyli w DFA na początku znajdujemy się w stanie q_0, a następnie po przeczytaniu literki a znajdujemy się w stanie a.
- Funkcja σ będzie podwajała nawiasy występujące w Σ_1, a nawias $<$ zastępowała kombinacją ([. Zatem

$\sigma(() = (($,
$\sigma([) = [[$,
$\sigma(<) = ([$.
I analogicznie dla zamknięć nawiasów:
$\sigma()) =))$,
$\sigma(]) =]]$,
$\sigma(>) =])$.

Chcemy pokazać, że dla tego transducera T i dla każdego $w \in \Sigma^*$ zachodzi $w \in A \Leftrightarrow f_T(w) \in B$, co oznacza, że $A \leqslant_{reg} B$.

Dla słowa w, składającego się z nawiasów trzech rodzajów, $f_T(w)$ produkuje słowo, gdzie każdy nawias jest zastąpiony dwoma, tak jak mówi σ. Oczywiście, to nowe nawiasowanie jest poprawne, co daje implikację w prawo.

Implikację w lewo pokażemy przez kontrapozycję, czyli $w \in \Sigma^* \setminus A \Rightarrow f_T(w) \notin B$. Weźmy dowolne $w \in \Sigma^* \setminus A$, czyli niepoprawne nawiasowanie. Czytając w od lewej do prawej stwierdzamy, że jest ono niepoprawne, ponieważ:

- Przeczytaliśmy nawias zamykający, a żadnego nawiasu otwierającego nie było wcześniej w w lub ostatni niezamknięty nawias otwierający był innego typu.
- Przeczytaliśmy całe słowo, a nie wszystkie nawiasy zostały zamknięte.

W pierwszym przypadku, jeśli przed nawiasem zamykającym nie było żadnego nawiasu otwierającego, to czytając $f_T(w)$ natrafimy na taką samą sytuację. Natomiast jeśli przeczytaliśmy nawias zamykający (nazwijmy go z), a ostatni niezamknięty nawias otwierający był innego typu (niech to będzie o), to prześledźmy czytanie/sprawdzanie poprawności $f_T(w)$. Do momentu przeczytania części słowa przed $\sigma(z)$ nie mamy dowodów, że $f_T(w)$ jest niepoprawne. Mamy co najmniej dwa niezamknięte nawiasy – $\sigma(o)$ (i są to dwa ostatnie niezamknięte). $\sigma(z)$ to dwa zamykające nawiasy. Jeden z nich będzie świadczył o niepoprawności $f_T(w)$ – nie będzie on tego samego typu, co ostatni przeczytany niezamknięty nawias otwierający.

W drugim przypadku w w musi być więcej nawiasów otwierających niż zamykających. Wtedy również w $f_T(w)$ jest więcej nawiasów otwierających niż zamykających (jednych i drugich jest dwa razy więcej niż w w). Zatem $f_T(w)$ nie jest poprawnym nawiasowaniem.