# Zadanie 76

Maciej Korpalski

**Treść:** Pokaż że istnieje takie $c > 0$, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieją $n > m$ i $L \subseteq \Sigma^*$ takie, że minimalny DFA rozstrzygający $L$ ma $n$ stanów, zaś każdy DFA rozstrzygający $L_{1/2}$ ma przynajmniej $cn^2$ stanów.

**Rozwiązanie:** Pokażemy, że dowolna stała $c < \frac{1}{4}$ będzie odpowiednia. Ustalmy więc $m \in \mathbb{N}$. Niech $\Sigma = \{0, 1\}$ oraz $L = \{w \in \Sigma^* : |w|_1 = n - 2\}$. Jakie dokładnie $n$ zostanie dobrane zostanie pokazane później. Skrótowo opiszę automat rozpoznający ten język. Język $L$ jest rozpoznawany przez automat mający $n$ stanów $q_0, q_1, ..., q_{n-2}, q_{n-1}$. Stan przechowuje informacje o tym, ile jedynek zostało wczytanych (ostatni stan pamięta, że zostało wczytanych ich zbyt dużo i nie można go zmienić). Akceptujący jest stan $q_{n-2}$. Wczytanie zera nie zmienia stanu, wczytanie jedynki zmienia stan na następny lub w wypadku ostatniego stanu ($q_{n-1}$) nie zmienia go (piekło żuczków!). Automat ten jest minimalny, gdyż słowa $1^i$ dla $0 \leqslant i \leqslant n - 1$ nie mogą znaleźć się w tych samych stanach w dowolnym automacie rozpoznającym $L$ (a jest ich $n$).

Dla wygody oznaczeń ustalmy $N = n - 2$. Pokażemy, że automat rozpoznający $L_{1/2}$ ma co najmniej $\frac{N^2}{4}$ stanów (więc będzie istniało $n > m$ takie, że $\frac{N^2}{4} \geqslant cn^2$ i takie $n$ dobierzemy). W tym celu wystarczy pokazać, że relacja $\sim_{L_{1/2}}$ zawiera przynajmniej tyle klas abstrakcji.

Rozważmy zbiór słów $A = \{1^k 0^l : 0 \leqslant k \leqslant \frac{N}{2}, 0 \leqslant l < N - 2k\}$ (chodzi zasadniczo o słowa mające taką liczbę jedynek i nie-jedynek, kolejność znaków nie ma znaczenia). Policzmy najpierw ile takich słów jest, a później pokażmy, że należą one do innych klas abstrakcji relacji $\sim_{L_{1/2}}$.

Rozważmy najpierw $N = 2N'$. Dla każdego $k$ w zbiorze $A$ jest dokładnie $N - 2k$ słów. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} |A| &= N + N - 2 + N - 4 + \cdots + 4 + 2 + 0 \\ &= 2\big(N' + N' - 1 + N' - 2 + \cdots + 2 + 1\big) = 2\frac{N'(N'+1)}{2} \geqslant \frac{N^2}{4}. \end{aligned}$$

Rozważmy teraz $N = 2N' + 1$. Tutaj:

$$\begin{aligned}|A| &= N + N - 2 + N - 4 + \cdots + 5 + 3 + 1\\ &= 2N' + 1 + 2N' - 1 + 2N' - 3 + \cdots + 5 + 3 + 1\\ &= N' + 1 + 2\big(N' + N' - 1 + N' - 2 + \cdots + 2 + 1\big) = N' + 1 + 2\frac{N'(N'+1)}{2} \geqslant \frac{N^2}{4}.\end{aligned}$$

Więc $|A| \geqslant \frac{N^2}{4}$ niezależnie od wyboru $N$.

Pokażmy teraz, że jeśli słowa $w_1, w_2 \in A$ nie są równe, to są w różnych klasach abstrakcji relacji $\sim_{L_{1/2}}$. Zauważmy najpierw, że wszystkie słowa ze zbioru $|A|$ nie są akceptujące (ponieważ $l + 2k < N$, czyli słowo $1^k 0^l$ nie może być połową słowa mającego $N$ jedynek).

Załóżmy najpierw, że $|w_1|_1 \neq |w_2|_1$. Możemy bso przyjąć, że $|w_1|_1 < |w_2|_1$. Dokładając wtedy $M = N - |w_1|_1$ jedynek do obu słów mamy $w_1 1^M \in L_{1/2}$ oraz $w_2 1^M \notin L_{1/2}$. Słowa $w_1$ i $w_2$ muszą więc być w innych klasach abstrakcji relacji $\sim_{L_{1/2}}$.

Rozważmy teraz dwa słowa $w_1, w_2$ takie, że $|w_1|_1 = |w_2|_1$, ale bso $w_1 < w_2$. Dołóżmy do obu słów $M = N - |w_2|_1 - |w_2|$ zer. Mamy wtedy $w_2 0^M \in L_{1/2}$, ale $w_1 0^M \notin M_{1/2}$, ponieważ $w_2 0^M 1^{M+|w_2|} \in L$ i $w_1 0^M 1^{M+|w_1|} \notin L$. W takim razie żadne dwa różne słowa ze zbioru $A$ nie są ze sobą w relacji $\sim_{L_{1/2}}$. Co kończy dowód.