

Języki formalne i złożoność obliczeniowa
Beata Janiak, 05.04.2020

Zadanie 39 Niech $A = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ będzie PDFA.

a. Załóżmy że dla pewnego trzelementowego $S \subseteq Q$ zbiór $csync(S)$ jest niepusty. Pokaż, że w takim razie istnieje $w \in csync(S)$ o długości nie większej niż $2|Q|^3$.

b. Udowodnij, że jeśli zbiór $csync(Q)$ jest niepusty, to zawiera on jakieś słowo o długości nie większej niż $2|Q|$.

Rozwiązanie a:

Niech $w = w_1w_2w_3\dots w_k$, gdzie $w_i \in \Sigma$ dla $i = 1\dots k$, będzie najkrótszym słowem należącym do $csync(S)$. Załóżmy nie wprost, że $k = |w| > 2|Q|^3$.

Niech s_1, s_2, s_3 będą różnymi elementami ze zbioru S . Rozpatrzmy teraz ciąg krotek:

$[(s_1, s_2, s_3), (\hat{\delta}(s_1, w_1), \hat{\delta}(s_2, w_1), \hat{\delta}(s_3, w_1)), (\hat{\delta}(s_1, w_1w_2), \hat{\delta}(s_2, w_1w_2), \hat{\delta}(s_3, w_1w_2)), \dots, (\hat{\delta}(s_1, w), \hat{\delta}(s_2, w), \hat{\delta}(s_3, w))]$

Wszystkich możliwych trójek stanów $Q \times Q \times Q$ jest $|Q|^3$ zatem na mocy zasady szufladkowej w ciągu (który jest długości $k + 1$), istnieją takie dwie identyczne krotki. Czyli istnieją $i < j$ takie że

$$\begin{aligned} &(\hat{\delta}(s_1, w_1w_2\dots w_i), \hat{\delta}(s_2, w_1w_2\dots w_i), \hat{\delta}(s_3, w_1w_2\dots w_i)) = \\ &= (\hat{\delta}(s_1, w_1w_2\dots w_i\dots w_j), \hat{\delta}(s_2, w_1w_2\dots w_i\dots w_j), \hat{\delta}(s_3, w_1w_2\dots w_i\dots w_j)) \end{aligned}$$

Zauważmy, że słowo $w' = w_1\dots w_iw_{j+1}\dots w_k$ również należy do $csync(S)$. (Dla każdego stanu q wartość $\hat{\delta}(q, w')$ jest określona (bo była określona dla w)). Ponadto $|w'| < |w|$ co prowadzi do sprzeczności i kończy dowód.

Rozwiązanie b:

Niech $w = w_1w_2w_3\dots w_k$, gdzie $w_i \in \Sigma$ dla $i = 1\dots k$, będzie najkrótszym słowem należącym do $csync(Q)$. Załóżmy nie wprost, że $k = |w| > 2|Q|$.

Przyjmijmy $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{n-1}\}$.

Tym razem rozpatrzmy ciąg zero-jedynkowych krotek długości $n = |Q|$.

Niech $a_j[i]$ oznacza i -tą pozycję j -tej krotki (numerując od 0).

Zdefiniujmy ciąg następująco:

$a_0[i] = 1$ dla wszystkich $i = 1, \dots, |Q|$ tj. $a_0 = \langle 1, 1, 1, \dots, 1 \rangle$

$a_j[i] = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stan q taki, że po wczytaniu słowa $w_1w_2\dots w_j$ automat startujący z q znajdzie się w stanie q_i tj. $\hat{\delta}(q, w_1w_2\dots w_j) = q_i$. W ten sposób otrzymany ciąg a_j jest reprezentacją stanów "osiągalnych" po przeczytaniu pierwszych j liter ze słowa w . W szczególności ostatni wyraz ciągu a_k zawiera dokładnie jedną jedynkę na pozycji stanu, w którym zsynchronizował się automat po przeczytaniu słowa w . Wszystkich wyrazów ciągu jest ponad $2^{|Q|}$, zaś możliwych ciągów zero-jedynkowych długości $|Q|$ dokładnie $2^{|Q|}$, ponownie korzystając z metody szufladkowej otrzymujemy, że istnieją $x < y$ takie, że $a_x = a_y$. Zauważmy jednak, że słowo $w' = w_1\dots w_xw_{y+1}\dots w_k$ również należy do $csync(Q)$. Ponadto $|w'| < |w|$ co prowadzi do sprzeczności i kończy dowód.