Sławomir Górawski

Zadanie 77. Niech $L \subseteq \Sigma^*$ będzie CFL. Czy wynika z tego, że $L_{3/4}$ jest CFL?

Nie. Rozwiązanie opiera się na intuicji, że wiele języków, w których długości co najmniej 3 różnych wystąpień symboli są ze sobą związane, nie jest CFL (np. $\{a^n b^n a^n : n \in \mathbb{N}\}$). $L_{3/4}$ rozumiemy jako język taki że dla każdego $w \in L_{3/4}$ możemy znaleźć $v \in \Sigma^*$, dla którego $|v| = |w|/3$ i $wv \in L$. Niech:

$$L = \{a^n b^m a^m b^n : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

L jest CFL, ponieważ istnieje generująca go CFG:

$$\begin{aligned} S &\to aSb \mid T \\ T &\to bTa \mid \varepsilon. \end{aligned}$$

Wtedy:

$$L_{3/4} \supset \{a^n b^m a^{(m+n)/2} : n, m \in \mathbb{N} \wedge n \leqslant m\}.$$

(Do $L_{3/4}$ należą też słowa z b na końcu, dla $n > m$, ale nie są one istotne dla tego rozwiązania.) Pokażemy, że $L_{3/4}$ nie jest CFL.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $L_{3/4}$ jest CFL. Użyjemy lematu o pompowaniu dla CFL. Niech p – stała z lematu. Weźmy $s = a^p b^p a^p$. $s \in L_{3/4}$. Niech $s = uvwxy$ tak że $|vx| \geqslant 1$ i $|vwx| \leqslant p$. Mamy dwie możliwości:

1. vwx zawiera się w pierwszych 2/3 s. Wtedy vx jest postaci $a^i b^j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Usuńmy v oraz x z s, otrzymując $uwy = a^{p-i} b^{p-j} a^p$, gdzie $i + j \geqslant 1$. Z lematu $\forall_{k \in \mathbb{N}}\ uv^k wx^k y \in L_{3/4}$, więc w szczególności $uwy \in L_{3/4}$. Z definicji $L_{3/4}$ uwy musi być postaci $a^n b^m a^{(m+n)/2}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Możemy to rozpisać:

$$\begin{aligned} (m+n)/2 &= p && \text{(Długość ostatniego ciągu symboli } b\text{)} \\ (p-i+p-j)/2 &= p && (n = p - i,\ m = p - j) \\ 2p - i - j &= 2p \\ i + j &= 0, \end{aligned}$$

   co daje sprzeczność z założeniem, że $|vx| = i + j \geqslant 1$.

2. vwx zawiera się w ostatnich 2/3 s. Wtedy vx jest postaci $b^i a^j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Niech $uwy = a^p b^{p-i} a^{p-j}$, gdzie $i + j \geqslant 1$. Z lematu $uwy \in L_{3/4}$. Teraz mamy do rozpatrzenia:

   (a) $i > 0$. Wtedy w uwy symboli b jest mniej $(p - i)$ niż symboli a przed nimi (p). Jeśli uwy należy do $L_{3/4}$, to musi być postaci $a^n b^m a^{(m+n)/2}$, gdzie $n \leqslant m$. Dla uwy $n = p$ oraz $m = p - i$, co daje sprzeczność z $n \leqslant m$.

   (b) $i = 0$. Wtedy $j \geqslant 1$. Jeśli $uwy = a^p b^{p-i} a^{p-j} = a^p b^p a^{p-j}$ należy do $L_{3/4}$, to musi być postaci $a^n b^m a^{(m+n)/2}$, z czego wynikają równości:

$$\begin{aligned} (m+n)/2 &= p - j && \text{(Długość ostatniego ciągu symboli } b\text{)} \\ (p+p)/2 &= p - j && (m = n = p) \\ j &= 0, \end{aligned}$$

   co daje sprzeczność z wynikającym z założenia $j \geqslant 1$.

$\square$