

Zadanie 78 o transducerach.

Wiktor Garbarek

20 marca 2020

Definicja 1. Transducer Moore’a to krotka $T = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma \rangle$, gdzie $\langle \Sigma, Q, q_0, \emptyset, \delta \rangle$ to DFA, $\sigma : Q \rightarrow \Sigma_1^*$.

Funkcja $f_T : \Sigma^* \rightarrow \Sigma_1^*$ jest zdefiniowana następująco:

$$\begin{aligned} f_T(\epsilon) &= \epsilon \\ f_T(wa) &= (f_T(w))\sigma(\hat{\delta}(q_0, wa)) \end{aligned}$$

Definicja 2. Transducer Mealy’ego to krotka $T' = \langle \Sigma', \Sigma'_1, Q', q'_0, \delta', \sigma' \rangle$, gdzie $\langle \Sigma', Q', q'_0, \emptyset, \delta' \rangle$ to DFA, $\sigma' : Q' \times \Sigma' \rightarrow \Sigma'_1^*$.

Funkcja $f_{T'} : \Sigma'^* \rightarrow \Sigma'_1^*$ jest zdefiniowana następująco:

$$\begin{aligned} f_{T'}(\epsilon) &= \epsilon \\ f_{T'}(wa) &= (f_{T'}(w))\sigma'(\hat{\delta}'(q'_0, w), a) \end{aligned}$$

Mała uwaga 1. W zbiorze zadań panuje notacja jakby funkcja przejścia DFA miała następujący typ: $\delta : \Sigma \times Q \rightarrow Q$. Na wykładzie natomiast przyzwyczailiśmy się do notacji $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$. Autor tego dokumentu wolał utrzymać notację z wykładu, wyżej odpowiednio adaptując definicje ze zbioru zadań. Oczywiście jest to uwaga kosmetyczna i przeważnie z kontekstu doskonale wynika, który argument jest stanem automatu, a który literą.

Definicja 3. Transducery T i T' są równoważne, jeśli funkcje f_T i $f_{T'}$ są równe.

Zadanie 78.1. Pokaż że dla każdego transducera Moore’a istnieje równoważny transducer Mealy’ego.

Dowód. Mamy dany transducer Moore’a $T = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma \rangle$.

Skonstruujemy transducer Mealy’ego $T' = \langle \Sigma', \Sigma'_1, Q', q'_0, \delta', \sigma' \rangle$ równoważny T . Niech

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \Sigma \\ \Sigma'_1 &= \Sigma_1 \end{aligned}$$

$$Q' = Q$$

$$q'_0 = q_0$$

$$\delta' = \delta$$

$$\sigma'(q, a) = \sigma(\delta(q, a))$$

Pokażemy teraz indukcyjnie po długości słowa, że $f_T = f_{T'}$. Oczywiście $f_T(\epsilon) = f_{T'}(\epsilon) = \epsilon$.

Założmy, że teza zachodzi dla wszystkich słów długości n . Weźmy teraz dowolne słowo w' , które ma $n+1$ liter. Istnieje zatem $a \in \Sigma$ takie, że $w' = wa$

$$\begin{aligned} f_{T'}(w') &= f_{T'}(wa) = f_{T'}(w)\sigma'(\hat{\delta}'(q'_0, w), a) \\ &= f_T(w)\sigma'(\hat{\delta}'(q'_0, w), a) \quad (\text{Z zał. indukcyjnego}) \\ &= f_T(w)\sigma(\delta(\hat{\delta}'(q'_0, w), a)) \\ &= f_T(w)\sigma(\delta(\hat{\delta}(q_0, w), a)) \\ &= f_T(w)\sigma(\hat{\delta}(q_0, wa)) \\ &= f_T(wa) = f_T(w') \end{aligned}$$

Otrzymana równość kończy dowód. □

Zadanie 78.2. Pokaż że dla każdego transducera Mealy'ego istnieje równoważny transducer Moore'a.

Dowód. Dla zachowania notacji z poprzedniego dowodu, przyjmijmy, że mamy dany transducer Mealy'ego $T' = \langle \Sigma', \Sigma'_1, Q', q'_0, \delta', \sigma' \rangle$. Skonstruujemy transducer Moore'a $T = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma \rangle$. Niech

$$\Sigma = \Sigma'$$

$$\Sigma_1 = \Sigma'_1$$

$$Q = Q' \times Q' \times \Sigma'$$

$$q_0 = (q'_0, q'_0, a_0)$$

$$\delta((q', _, _), a) = (\delta'(q', a), q', a)$$

$$\sigma((_, q', b)) = \sigma'(q', b)$$

gdzie $a_0 \in \Sigma'$ jest jakimś wcześniej ustalonym znakiem.

Tak jak poprzednio udowodnimy indukcyjnie, że $f_{T'} = f_T$. Oczywiście $f_T(\epsilon) = f_{T'}(\epsilon) = \epsilon$.

Założmy, że teza zachodzi dla wszystkich słów długości n . Weźmy teraz dowolne słowo w' , które ma $n+1$ liter. Istnieje zatem $a \in \Sigma$ takie, że $w' = wa$.

$$\begin{aligned}
f_T(w') &= f_T(wa) = f_T(w)\sigma(\hat{\delta}(q_0, wa)) \\
&= f_T(w)\sigma(\hat{\delta}((q'_0, q'_0, a_0), wa)) \\
&= f_T(w)\sigma((\hat{\delta}'(q'_0, wa), \hat{\delta}'(q'_0, w), a)) \\
&= f_T(w)\sigma'(\hat{\delta}'(q'_0, w), a) \\
&= f_{T'}(w)\sigma'(\hat{\delta}'(q'_0, w), a) && \text{(Z zał. indukcyjnego)} \\
&= f_{T'}(wa) = f_{T'}(w')
\end{aligned}$$

Otrzymana równość kończy dowód. □