

Lista 2 - zadanie 43

Treść zadania

Udowodnij, że rzut relacji automatycznej jest relacją automatyczną.

Notacje

Dla jednoznaczności wypiszę tutaj użyte konwencje notacyjne:

- P_Σ - projekcja zbioru po ostatniej współrzędnej (ucinamy ostatnią współrzędną - bez utraty ogólności)
- $\langle a, 0 \rangle$ - dopisanie do słowa a zera (dodanie wymiaru)

Rozwiązanie

Wiemy, że R jest relacją automatyczną.

Chcemy pokazać, że rzut relacji R (oznaczony P_R jest relacją automatyczną)

Twierdzenie 1

Istnieje NFA B , taki, że rozpoznaje słowa z L_{P_R}

Dowód

Na początku chciałbym zauważyć, że wnioskiem z tego twierdzenia jest to, że P_R jest relacją automatyczną.

Z tego, że R jest relacją automatyczną wiemy, że istnieje automat DFA A rozpoznający język L_R

$$A = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$$

Zdefiniujmy więc szukany automat NFA B :

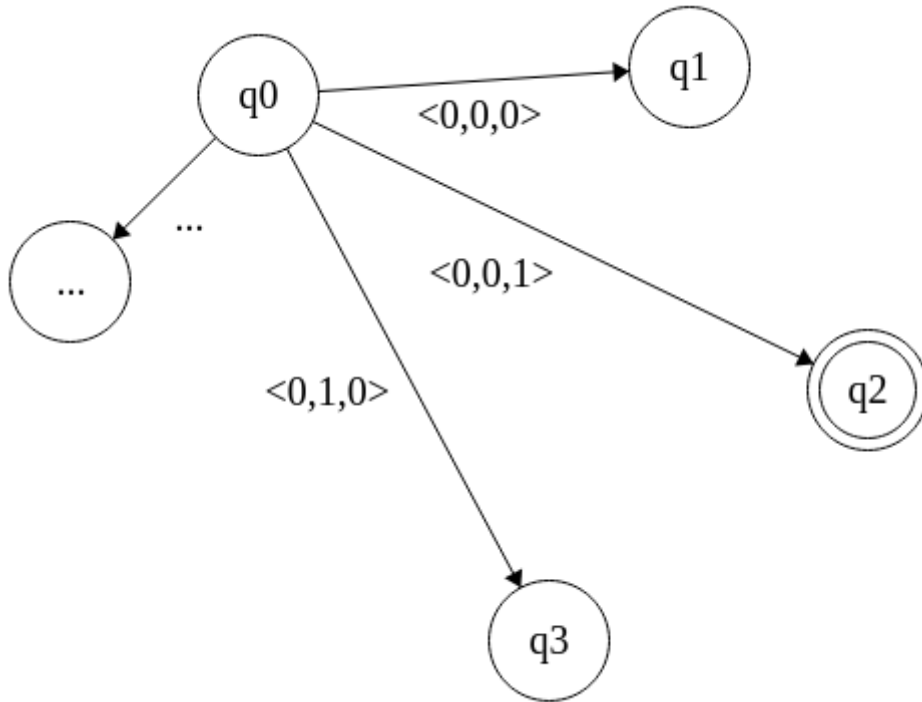
$$B = \langle P_\Sigma, Q, \{q_0\}, F, \delta_P \rangle,$$

gdzie $\delta_P : P_\Sigma \times Q \rightarrow P(Q)$, gdzie $P(Q)$ to zbiór potęgowej Q

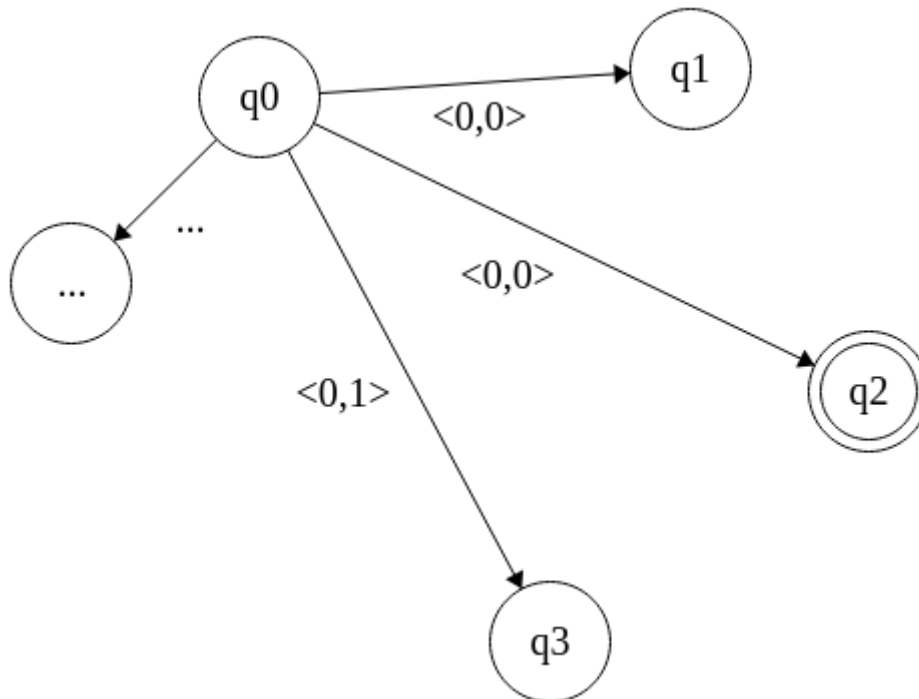
$$\delta_P(a, q) = \{\delta(\langle a, 0 \rangle, q), \delta(\langle a, 1 \rangle, q)\}$$

Idea dowodu na obrazku:

Dostajemy automat A :



I przekształcamy go na NFA B :



Lemat 1

$$w \in L_A \Rightarrow P_w \in L_B$$

To jest dość oczywiste - tak skonstruowaliśmy naszą funkcję δ_P

Lemat 2

Nie dla mnie

$$P_w \notin L_B \Rightarrow (\forall_{v \in \Sigma^k} (P_v = P_w \Rightarrow v \notin L_A))$$

Też dosyć oczywisty lemat - mówi tyle, że jeśli jakieś słowo nie należy do L_B to nie da się go "rozszerzyć" (dopisać 0 lub 1 do każdej litery) tak żeby należał do L_A

Sam dowód jest konsekwencją konstrukcji δ_P

Mimo wszystko, chciałbym ten dowód zobaczyć.

Wnioski

Korzystając z wniosków z Twierdzenia 1, popartego Lematami 1 i 2 - pokazaliśmy, że L_R jest relacją automatyczną.

Konstrukcja jest z grubsza dobra, ale nie całkowicie.
Gdyby był dowód (lub jego szkic) poprawności, to można by było spostrzec te przypadki brzegowe.

Swierdzenie, że dowód jest oczywisty dowodem nie jest.
Należy to poprawić.